Agujeros Negros sin Singularidades con Campos Escalares

Miguel San Juan

Instituto de Matemática
Universidad de Talca

Presentación de Proyecto de Tesis

19 de noviembre de 2020

Contenido

- Relatividad General.
- Agujeros Negros Clásicos.
- Singularidades.
- Teorema de Penrose.
- Agujeros Negros si Singularidades (Regulares).
- Agujeros Negros Regulares con Campos Escalares.
- Conclusiones y trabajos en curso.

Relatividad General

- Principio de Equivalencia:
  "En regiones suficientemente pequeñas del espacio, es imposible afirmar si estamos en un campo gravitatorio en reposo o en el espacio vacío uniformemente acelerados."

- La Teoría de la Relatividad General, formulada por Albert Einstein en 1915, establece que la gravedad es una manifestación de la curvatura del espacio-tiempo.

- Ecuaciones de Einstein:

$$R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} = 8\pi G T_{\mu\nu}$$

Agujeros Negros Clásicos

- Schwarzschild (1916): Solución en el vacío,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

donde M es un una constante de integración asociada a la masa y $d\Omega^2$ es la métrica sobre una 2-esfera unitaria S^2,

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2(\theta) d\phi^2$$

Agujeros Negros Clásicos

- Reissner-Nordström (1918): Solución con un campo electromagnético,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

$$A_\mu dx^\mu = \frac{Q}{r}$$

en la cual Q es una constante de integración que representa la carga eléctrica.

- Kerr (1963): Solución rotante,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{\rho^2}\right) dt^2 - \frac{4GMar\sin^2(\theta)}{\rho^2} dt d\phi + \frac{\rho^2}{\Delta} dr^2$$

$$+\rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2(\theta)}{\rho^2}\left[(r^2 + a^2)^2 - a^2\Delta\sin^2(\theta)\right] d\phi^2,$$

donde

$$\Delta(r) = r^2 - 2GM + a^2$$

$$\rho^2(r,\theta) = r^2 + a^2\cos^2(\theta).$$

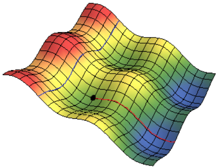
El parametro a representa el momento angular por unidad de masa,

$$a = \frac{J}{M}$$

Singularidades

- Una variedad semi Riemanniana para la cual cada geodésica maximal está definida en toda la recta real es llamada geodésicamente completa.

- Una variedad de Lorentz es singular si no es geodésicamente completa.



- Una singularidad se puede definir como una incompletitud de las geodésicas. En ella, las leyes de la física no se pueden describir.

Singularidades

- A modo de ejemplo, observemos que el espacio tiempo de Schwarzschild,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2,$$

  parece presentar singularidades en $r = 0$ y $r = 2GM$.

- Una manera de identificar singularidades es calcular invariantes de curvatura.

$$R, R_{\mu\nu}R^{\mu\nu}, R_{\mu\nu\rho\theta}R^{\mu\nu\rho\theta}, ...$$

Tipos de Singularidades

- Singularidad Física: Singularidad del espacio tiempo tapada por un horizonte de eventos.

  En el espacio tiempo de Schwarzschild:

  Dado que la solución de Schwarzschild es Ricci-flat, calculamos el invariante de Kretschmann,

$$R_{\mu\nu\rho\theta}R^{\mu\nu\rho\theta} = \frac{48G^2M^2}{r^6}$$

  La region $r = 0$ es una singularidad física.

Tipos de Singularidades

- Singularidad de coordenadas: Solo se debe al sistema de coordenadas utilizado.

  En el espacio tiempo de Schwarzschild la región $r = 2GM$ es una singularidad de coordenada.

- Coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes,

$$v = t + \int \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr$$

Coordenadas de Eddington-Finkelstein

- El espacio tiempo de Schwarzschild en las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes, es de la forma,

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dv^2 + 2dvdr + r^2 d\Omega^2$$

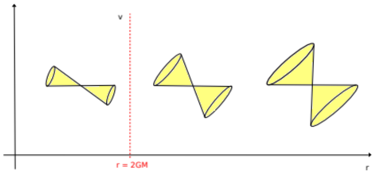
- La superficie $r = 2GM$ dejo de ser singular, debido a que el determinante de la métrica $g = -r^2 \sin^2(\theta)$ existe para este punto.

- La región $r = 2GM$ determina el horizonte de eventos.

- Considerando geodésicas radiales nulas se obtiene,

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{\left(1-\frac{2GM}{r}\right)} \end{cases}$$

- Conos de luz cercanos a la superficie $r = 2GM$, en coordenadas, (v, r)



- Ninguna trayectoria tipo luz o tipo tiempo dirigida al futuro puede alcanzar $r > 2GM$ comenzando en $r \leq 2GM$.

Tipos de Singularidades

- Singularidad desnuda: Singularidad del espacio tiempo que no es tapada por un horizonte de eventos (Conjetura de censura cosmica).

  En el espacio tiempo de Schwarzschild:

  Si $M < 0$ entonces la region $r = 0$ es una singularidad desnuda.

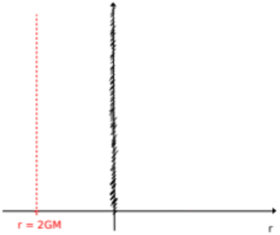
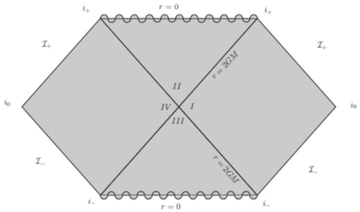


Diagrama de Penrose-Carter

- Diagrama de Penrose-Carter del espacio tiempo de Schwarzschild.



- Las regiones I y IV son asintóticamente planas.
- La regiones II y III presentan una singularidad en el futuro y en el pasado respectivamente.
- Las geodésicas de luz pueden nacer en la singularidad del pasado o morir en la del futuro.

Teorema de Penrose (1965)

- Hipótesis:

  1. Condición de Energía débil (densidad de energía positiva sobre rayos de luz).
  2. Existe una superficie de Cauchy no compacta (Espacio globalmete hiperbólico, no compacto).
  3. Existe una superficie cerrada atrapada (existe un horizonte de eventos).

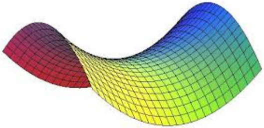
- Conclusión: Existe incompletitud geodésica nula (rayo de luz intercepta una singularidad).

  Este teorema exhibe que la formación de singularidades en Relatividad General es génerica, es decir no depende de la símetria del espacio.

Superficie de Cauchy no compacta

- ¿Como entendemos la existencia de una superficie de Cauchy no compacta?

  Consideremos una hipersuperficie $t =$ constante en el espacio tiempo representada por, $\sum_t$

  ¿Tiene sentido establecer condiciones iniciales sobre $\sum_t$ para determinar la evolución posterior de un sistema físico de manera única?

Superficie de Cauchy no compacta

- Tomando un evento al futuro tal que su cono de luz pasado se intersecte con la hipersuperficie $\sum_t$,

Todas las curvas del pasado intersectan a $\sum_t$.

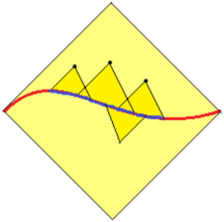
- ¿Cuáles son todos los eventos, donde estableciendo condiciones iniciales sobre $\sum_t$, éstas determinan completamente lo que ocurre sobre dichos eventos?

$D^+(\sum_t) :=$ Dominio de dependencia futururo de $\sum_t$.

Superficie de Cauchy no compacta

- Análogamente podemos definir el dominio de dependencia pasado $D^{-}(\sum_t)$.

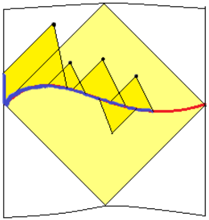
- El dominio de dependencia total de $\sum_t$ es defenido por $D(\sum_t) := D^{+}(\sum_t) \cup D^{-}(\sum_t)$.



- Si el espacio tiempo coincide con el dominio de dependencia total, decimos que es globalmente hiperbólico y la hipersuperficie es de Cauchy.

Superficie de Cauchy no compacta

- En general el espacio tiempo no es globalmente hiperbólico.



- Existen eventos que no solo estan determinados por condiciones iniciales, sino que es necesario poner condiciones de frontera.

- El teorema de Penrose deja abierta la posibilidad de que existan agujeros negros regulares.

Teorema de Penrose

- Al menos una de las tres hipótesis no debe cumplirse. En consecuencia, si no existe incompletitud geodésica nula, es razonable pensar que no existe un espacio globalmente hiperbólico.
- Es posible tener un agujero negro regular, no globalmente hiperbólico, con densidad de energía positiva sobre los rayos de luz.

Agujeros Negros Regulares

- El espacio tiempo para ciertas soluciones de tipo agujero negro regular puede ser escrito como:

$$ds^2 = -\left(1 - \mu\frac{X(r)}{r}\right)dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 - \mu\frac{X(r)^\lambda}{r}\right)} + r^2 d\Omega^2,$$

donde μ es representa la masa del agujero negro y

$$X(r) = \frac{1}{\left(1 + (\frac{r_0}{r})^q\right)^{\frac{p}{q}}}$$

- La solución de Bardeen (1968), se obtiene con $p = 3$ y $q = 2$.
- La solución de Hayward (2006), se obtiene con $p = q = 3$.

- La primera solución exacta, proveniente de un principio de acción, de tipo agujero negro regular fue entregada por Ayón Beato y Garcia. (1998):

$$ds^2 = -\left(1 + \frac{q^2 r^2}{(r^2 + q^2)^2} - \frac{2mr^2}{(r^2 + q^2)^{\frac{3}{2}}}\right) dt^2 + \frac{dr^2}{\left(1 + \frac{q^2 r^2}{(r^2+q^2)^2} - \frac{2mr^2}{(r^2+q^2)^{\frac{3}{2}}}\right)} + r^2 d\Omega^2,$$

  m representa la masa y q la carga eléctrica.

- Esta solución fue obtenida utilizando electrodinámica no lineal.

Acción

- La solución entregada por Ayón Beato y Garcia se derivo de la siguiente acción,

$$S = \int dv \left(\frac{1}{16\pi} R - \frac{1}{4\pi} \mathcal{L}(F) \right),$$

  en la que R es la curvatura escalar y $\mathcal{L}$ es una función de $F = \frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}$ dada por

$$\mathcal{L} = \frac{P(1 - 8\sqrt{-2q^2P} - 6q^2P)}{(1 + \sqrt{-2q^2P})^4} - \frac{6m(-2q^2P)^{\frac{5}{4}}(3 - 2\sqrt{-2q^2P})}{4q^2|q|(1 + \sqrt{-2q^2P})^{\frac{7}{2}}},$$

  donde $P := (\mathcal{L}_F)^2 F$.
- Note que el langrangiano depende explícitamente de la carga q y la masa m.
- Esto ocurre en todas las soluciones de tipo agujero negro regular que provienen de la electrodinámica no lineal.

- Nuestro objetivo es construir agujeros negros regulares con una fuente dada por campos escalares.

¿Por qué es interesante explorar teorías de Gravedad modificada?

- Se ha demostrado que la gravedad propaga ondas gravitacionales con una velocidad cercana a la de la luz, con una precisión extremadamente alta.

Teoría Escalar-Tensor

- Sin embargo, las incompatibilidades de la relatividad general a escalas cuánticas y la naturaleza desconocida de la energía oscura han motivado a la comunidad física a explorar teorías modificadas de la gravedad.
- Una de las maneras más simples de modificar la teoría es agregar campos escalares con uno o más grados de libertad. Esto se conoce como teoría escalar-tensor.
- Algunas teorías escalar-tensor son compatibles con las obeservaciones realizadas, ya que las ondas gravitacionales se propagan a la velocidad de la luz.

Teoría Escalar-Tensor

- La teoria escalar-tensor más general con ecuaciones de movimiento de segundo orden, libre de fantasmas, se conoce como teoría de Horndeski.

- La acción es dada por $\int d^4x\sqrt{-g}\sum_{i=2}^{5}\mathcal{L}_i$, donde

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_2 = K(\phi, X), \qquad \mathcal{L}_3 = -G_3(\phi, X)\Box\phi, \\
&\mathcal{L}_4 = G_4(\phi, X)R + G_{4,X}\left[(\Box\phi)^2 - (\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2\right] \\
&\mathcal{L}_5 = G_5(\phi, X)G_{\mu\nu}\nabla^\mu\nabla^\nu\phi - \frac{G_{5,X}}{6}\Big[(\Box\phi)^3 \\
&-3\,(\Box\phi)\,(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^2 + 2\,(\nabla_\mu\nabla_\nu\phi)^3\Big]
\end{aligned}$$

Teoría Escalar-Tensor de Orden Superior Degenerada (DHOST)

- Existen teorias de tipo escalar-tensor de ordenes superiores que propagan grados de libertad libres de fantasmas.

- La teoría más general, en la que el langrangiano depende de forma cuadratica de derivadas de segundo orden de un campo escalar, se conoce como Teoría Escalar-Tensor de Orden Superior Degenerada (DHOST).

$$\begin{aligned}\mathcal{L} = \quad & K + G\, R + F_1 \Box\phi + F_2 G^{\mu\nu}\phi_{\mu\nu} + A_1 \phi_{\mu\nu}\phi^{\mu\nu} + A_2(\Box\phi)^2 \\ & + A_3 \Box\phi\, \phi^{\mu}\phi_{\mu\nu}\phi^{\nu} + A_4 \phi^{\mu}\phi_{\mu\nu}\phi^{\nu\rho}\phi_{\rho} + A_5 \left(\phi^{\mu}\phi_{\mu\nu}\phi^{\nu}\right)^2 ,\end{aligned}$$

las funciones de acoplamiento K, G, F_i y A_i son funciones arbitrarias de ϕ y $X = \phi_\mu \phi^\mu$.

Degenerate Higher Order Scalar Tensor (DHOST)

- Las condiciones de la teoría DHOST estan dadas por,

$$
\begin{aligned}
A_1 &= -A_2 \neq \frac{G}{X}, \\
A_4 &= \frac{1}{8(G - XA_1)^2}\left\{4G\left[3(-A_1 + 2G_X)^2 - 2A_3G\right] - A_3X^2(16A_1G_X + A_3G)\right. \\
&\quad \left. +4X\left[-3A_2A_3G + 16A_1^2G_X - 16A_1G_X^2 - 4A_1^3 + 2A_3GG_X\right]\right\}, \\
A_5 &= \frac{1}{8(G - XA_1)^2}(2A_1 - XA_3 - 4G_X)\left(A_1(2A_1 + 3XA_3 - 4G_X) - 4A_3G\right).
\end{aligned}
$$

- Esta teoría incluye el modelo de Horndeski.

- Para que las ondas gravitacionales se propaguen a la velocidad de la luz, se requiere que $A_1 = A_2 = 0$.

Conclusiones y trabajos en curso

- En este trabajo de tesis veremos que algunas teorías específicas de tipo DHOST, que estan en adecuación con las observaciones en el sentido de que la velocidad de las ondas gravitacionales es cercana a la velocidad de la luz, pueden contener un Agujero Negro Regular como parte de su espectro de solución.
- Utilizaremos una técnica basada en la transformación de Kerr-Schild para construir soluciones de Agujeros Negros regulares.
- La clave para construir este tipo de Agujeros Negros es extender el metodo de Kerr-Schild a partir de una solución de semilla muy sencilla.

Conclusiones y trabajos en curso

- Para que este método pueda funcionar es necesario que el término cinético del campo escalar permanezca invariante bajo la transformación de Kerr-Schild.
- Gracias a la fuente dada por campos escalares Nuestros Agujeros Negros tendran una masa que realmente es una constante de integración que esta asociada al hecho de que el vector ∂t es un vector de Killing.
- Nuestras soluciones permiten masas dentro de una rango arbitrario, por lo que podremos hacer el todo el estudio termódinamico de las soluciones encontradas.

Referencias

- G. W. Horndeski, Int. J. Theor. Phys. $10, 363$(1974).
- D. Langlois and K. Noui, JCAP 1602(2016)034.
- M. Crisostomi, K. Koyama and G. Tasinato, JCAP $1604, 044$(2016).
- Bardeen, J., in Proceedings of GR5, Tiis, U.S.S.R. (1968).
- E. Ayon-Beato and A. Garcia, Phys. Rev. Lett. $80, 5056$(1998).
- S. A. Hayward, Phys. Rev. Lett. $96, 031103$(2006).

Muchas Gracias

Muchas gracias por su atención.