Universidad de Talca
Instituto de Matemática

Proyecto de tesis para doctorado

Título

Positividad para bases pre-canónicas

Presentado por: Yamil Sagurie

Profesor guía: David Plaza

Enero 2023

Contenidos

1. Introducción
2. Sistemas de Coxeter y álgebras de Hecke
3. Sistemas de raíces en tipo A
4. Álgebra de Hecke esférica
5. Bases pre-canónicas
6. Objetivos planteados

Contenidos

1. Introducción
2. Sistemas de Coxeter y álgebras de Hecke
3. Sistemas de raíces en tipo A
4. Álgebra de Hecke esférica
5. Bases pre-canónicas
6. Objetivos planteados

Introducción

- Buscamos comprender de mejor manera los llamados polinomios de Kazhdan-Lusztig $h_{\mu,\lambda}(v)$.
- Dada una representación irreducible V_λ con peso mas alto λ de un álgebra de Lie semisimple , si $\mu \in V_\lambda$ los polinomios de Kazhdan-Lusztig permiten calcular la multiplicidad de μ.
- La formula de multiplicidad de Kostant y los polinomios de Kostka-Fuoulkes $K_{\lambda,\mu}(v)$ tambien permiten calcular la multiplicidad de un peso, y además

$$h_{\mu,\lambda}(v) = K_{\lambda,\mu}(v^2) \tag{1}$$

- Libedinsky, Patimo, Plaza definen las bases pre-canónicas con propósito de describir una secuencia finita con pasos accesibles de calcular para obtener descomposiciones como los polinomios de Kazhdan-Lusztig.

Contenidos

1. Introducción
2. Sistemas de Coxeter y álgebras de Hecke
3. Sistemas de raíces en tipo A
4. Álgebra de Hecke esférica
5. Bases pre-canónicas
6. Objetivos planteados

Sistema de Coxeter

Definición 2.1

Un sistema de Coxeter es un par (W, S) con W un grupo y $S \subset W$ un conjunto generador con las siguientes relaciones: Considere $s, s' \in S$ y un número $m(s, s') \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned} (s \cdot s')^{m(s,s')} &= 1 \\ m(s,s) &= 1 \\ m(s,s') = m(s',s) &\geq 2 \qquad \text{para } s \neq s' \end{aligned}$$

Si $m(s, s') = \infty$ se entiende que no hay relaciones entre s y s'.

Sistema de Coxeter

Definición 2.1

Un sistema de Coxeter es un par (W, S) con W un grupo y $S \subset W$ un conjunto generador con las siguientes relaciones: Considere $s, s' \in S$ y un número $m(s, s') \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned} (s \cdot s')^{m(s,s')} &= 1 \\ m(s,s) &= 1 \\ m(s,s') = m(s',s) &\geq 2 \qquad \text{para } s \neq s' \end{aligned}$$

Si $m(s, s') = \infty$ se entiende que no hay relaciones entre s y s'.
Adicionalmente se definen en W:

- Una función largo $\ell : W \to \mathbb{N}$ que asigna a cada $w \in W$ el largo de la palabra minimal que representa a w en el alfabeto S. Una palabra de largo minimal se le llama expresión reducida.

Sistema de Coxeter

Definición 2.1

Un sistema de Coxeter es un par (W, S) con W un grupo y $S \subset W$ un conjunto generador con las siguientes relaciones: Considere $s, s' \in S$ y un número $m(s, s') \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$\begin{aligned} (s \cdot s')^{m(s,s')} &= 1 \\ m(s,s) &= 1 \\ m(s,s') = m(s',s) &\geq 2 \qquad \text{para } s \neq s' \end{aligned}$$

Si $m(s, s') = \infty$ se entiende que no hay relaciones entre s y s'.
Adicionalmente se definen en W:

- Una función largo $\ell : W \to \mathbb{N}$ que asigna a cada $w \in W$ el largo de la palabra minimal que representa a w en el alfabeto S. Una palabra de largo minimal se le llama expresión reducida.
- Orden de Bruhat. Dado $v, w \in W$, $v \leq w$ si dada una expresión reducida para w, es posible obtener una expresión reducida para v eliminando letras en la expresión de w.

Sistema de Coxeter

Ejemplo 2.1

Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el espacio vectorial formado por los vectores cuya suma de coordenadas es 0. Considere s_i la reflexión en E que permuta las coordenadas i e $i+1$. Entonces

Sistema de Coxeter

Ejemplo 2.1

Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el espacio vectorial formado por los vectores cuya suma de coordenadas es 0. Considere s_i la reflexión en E que permuta las coordenadas i e $i+1$. Entonces

$$W_f = \left\langle s_1, s_2, \cdots, s_n \;\middle|\; \begin{array}{rl} s_i^2 = 1 & \\ (s_i s_j)^2 = 1 & \text{para } |i-j| > 1 \\ (s_i s_j s_i)^3 = 1 & \text{para } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle. \tag{2}$$

El par (W_f, S) posee estructura de sistema de Coxeter con $S = \{s_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Sistema de Coxeter

Ejemplo 2.1

Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el espacio vectorial formado por los vectores cuya suma de coordenadas es 0. Considere s_i la reflexión en E que permuta las coordenadas i e $i+1$. Entonces

$$W_f = \left\langle s_1, s_2, \cdots, s_n \;\middle|\; \begin{array}{rll} s_i^2 = 1 & \\ (s_i s_j)^2 = 1 & \text{para } |i-j| > 1 \\ (s_i s_j s_i)^3 = 1 & \text{para } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle. \tag{2}$$

El par (W_f, S) posee estructura de sistema de Coxeter con $S = \{s_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Ejemplo 2.2

Si s_0 es la reflexión respecto del hiperplano $x_1 - x_{n+1} + 1 = 0$. Entonces

Sistema de Coxeter

Ejemplo 2.1

Sea $E \subset \mathbb{R}^{n+1}$ el espacio vectorial formado por los vectores cuya suma de coordenadas es 0. Considere s_i la reflexión en E que permuta las coordenadas i e $i+1$. Entonces

$$W_f = \left\langle s_1, s_2, \cdots, s_n \;\middle|\; \begin{array}{rl} s_i^2 = 1 & \\ (s_i s_j)^2 = 1 & \text{para } |i-j| > 1 \\ (s_i s_j s_i)^3 = 1 & \text{para } |i-j| = 1 \end{array} \right\rangle. \tag{2}$$

El par (W_f, S) posee estructura de sistema de Coxeter con $S = \{s_i \mid 1 \leq i \leq n\}$.

Ejemplo 2.2

Si s_0 es la reflexión respecto del hiperplano $x_1 - x_{n+1} + 1 = 0$. Entonces

$$W_a = \left\langle s_0, s_1, s_2, \cdots, s_n \;\middle|\; \begin{array}{rl} s_i^2 = 1 & \\ (s_i s_j)^2 = 1 & \text{para } n > |i-j| > 1 \\ (s_i s_j)^3 = 1 & \text{para } |i-j| = 1 \\ (s_0 s_n)^3 = 1 & \end{array} \right\rangle. \tag{3}$$

El par (W_a, S) posee estructura de sistema de Coxeter con $S = \{s_i \mid 0 \leq i \leq n\}$.

Álgebra de Hecke

Definición 2.2

Sea $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ un anillo y (W, S) un sistema de Coxeter. EL Álgebra de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S)$ es el $\mathcal{A}$-álgebra asociativa generada por los símbolos formales $\{H_s \mid s \in S\}$ bajo las siguientes relaciones: Sean $s, s' \in S$ entonces

$$\begin{aligned} {H_s}^2 &= (v^{-1} - v)H_s + 1 \\ \underbrace{H_s H_{s'} H_s \cdots}_{m(s,s')} &= \underbrace{H_{s'} H_s H_{s'} \cdots}_{m(s,s')} \end{aligned}$$

Álgebra de Hecke

Definición 2.2

Sea $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ un anillo y (W, S) un sistema de Coxeter. EL Álgebra de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S)$ es el $\mathcal{A}$-álgebra asociativa generada por los símbolos formales $\{H_s \mid s \in S\}$ bajo las siguientes relaciones: Sean $s, s' \in S$ entonces

$$\begin{aligned} {H_s}^2 &= (v^{-1} - v)H_s + 1 \\ \underbrace{H_s H_{s'} H_s \cdots}_{m(s,s')} &= \underbrace{H_{s'} H_s H_{s'} \cdots}_{m(s,s')} \end{aligned}$$

Sea $w \in W$ y $s_1 s_2 \cdots s_n$ una expresión reducida para w, entonces

$$H_w := H_{s_1} H_{s_2} \cdots H_{s_n}$$

Álgebra de Hecke

Definición 2.2

Sea $\mathcal{A} = \mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ un anillo y (W, S) un sistema de Coxeter. EL Álgebra de Hecke $\mathcal{H} = \mathcal{H}(W, S)$ es el $\mathcal{A}$-álgebra asociativa generada por los símbolos formales $\{H_s \mid s \in S\}$ bajo las siguientes relaciones: Sean $s, s' \in S$ entonces

$$\begin{aligned} {H_s}^2 &= (v^{-1} - v)H_s + 1 \\ \underbrace{H_s H_{s'} H_s \cdots}_{m(s,s')} &= \underbrace{H_{s'} H_s H_{s'} \cdots}_{m(s,s')} \end{aligned}$$

Sea $w \in W$ y $s_1 s_2 \cdots s_n$ una expresión reducida para w, entonces

$$H_w := H_{s_1} H_{s_2} \cdots H_{s_n}$$

El conjunto $\{H_w | w \in W\}$ constituye una base para $\mathcal{H}$. llamaremos a esta base la base estándar de $\mathcal{H}$.

Base de Kazhdan-Lusztig

Considere la aplicación $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definida por:

$$\begin{aligned} d(v) &= v^{-1} \\ d(H_w) &= (H_{w^{-1}})^{-1} \end{aligned}$$

Base de Kazhdan-Lusztig

Considere la aplicación $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definida por:

$$\begin{aligned} d(v) &= v^{-1} \\ d(H_w) &= (H_{w^{-1}})^{-1} \end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Teorema de Kazhdan-Lusztig)

Para $w \in W$ existe un único elemento $\underline{H}_w \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\begin{aligned} d(\underline{H}_w) &= \underline{H}_w \\ \underline{H}_w &= \sum_{x \leq w} h_{x,w}(v) H_x \end{aligned}$$

Base de Kazhdan-Lusztig

Considere la aplicación $d : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ definida por:

$$\begin{aligned} d(v) &= v^{-1} \\ d(H_w) &= (H_{w^{-1}})^{-1} \end{aligned}$$

Teorema 2.1 (Teorema de Kazhdan-Lusztig)

Para $w \in W$ existe un único elemento $\underline{H}_w \in \mathcal{H}$ tal que:

$$\begin{aligned} d(\underline{H}_w) &= \underline{H}_w \\ \underline{H}_w &= \sum_{x \leq w} h_{x,w}(v) H_x \end{aligned}$$

donde $h_{x,w}(v) \in v\mathbb{Z}[v]$ son los polinomios de Kazhdan-Lusztig y además el conjunto $\{\underline{H}_w \mid w \in W\}$ es una base llamada la base de Kazhdan-Lusztig.

Contenidos

1. Introducción
2. Sistemas de Coxeter y álgebras de Hecke
3. Sistemas de raíces en tipo A
4. Álgebra de Hecke esférica
5. Bases pre-canónicas
6. Objetivos planteados

Sistema de raíces en tipo A

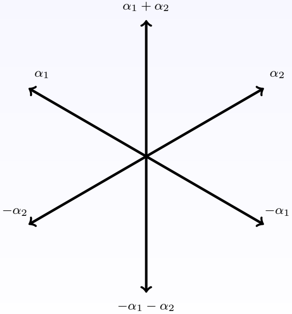
Considere $E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$ y $\epsilon_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ el vector con 1 en la posición i y 0 en el resto.

$$\begin{aligned} \Phi = &\quad \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n+1\} \\ \Phi^+ = &\quad \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1\} \\ \Delta = &\quad \{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\} \end{aligned} \tag{4}$$

Sistema de raíces en tipo A

Considere $E = \{x \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \sum_{i=1}^{n+1} x_i = 0\}$ y $\epsilon_i \in \mathbb{R}^{n+1}$ el vector con 1 en la posición i y 0 en el resto.

$$\begin{aligned} \Phi = &\quad \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid i \neq j, 1 \leq i, j \leq n+1\} \\ \Phi^+ = &\quad \{\epsilon_i - \epsilon_j \mid 1 \leq i < j \leq n+1\} \\ \Delta = &\quad \{\alpha_i = \epsilon_i - \epsilon_{i+1} \mid 1 \leq i \leq n\} \end{aligned} \tag{4}$$



Sistema de raíces en tipo A

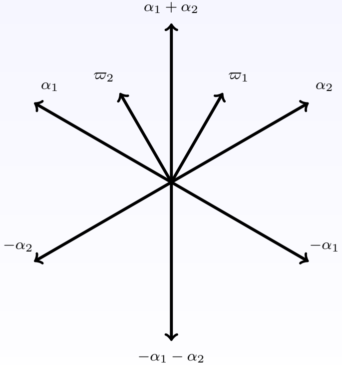
$$\begin{aligned} X = &\quad \{\lambda \in E \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta\} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varpi_i \\ X^+ = &\quad \{\lambda \in E \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \Delta\} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\varpi_i \end{aligned} \tag{5}$$

$\varpi_1, \varpi_2, \cdots, \varpi_n$ están determinados por $\langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$

Sistema de raíces en tipo A

$$\begin{aligned} X = &\quad \{\lambda \in E \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{Z}, \forall \alpha \in \Delta\} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{Z}\varpi_i \\ X^+ = &\quad \{\lambda \in E \mid \langle \lambda, \alpha \rangle \in \mathbb{N}, \forall \alpha \in \Delta\} = \textstyle\sum_{i=1}^{n} \mathbb{N}\varpi_i \end{aligned} \tag{5}$$

$\varpi_1, \varpi_2, \cdots, \varpi_n$ están determinados por $\langle \varpi_i, \alpha_j \rangle = \delta_{i,j}$



Sistema de raíces en tipo A

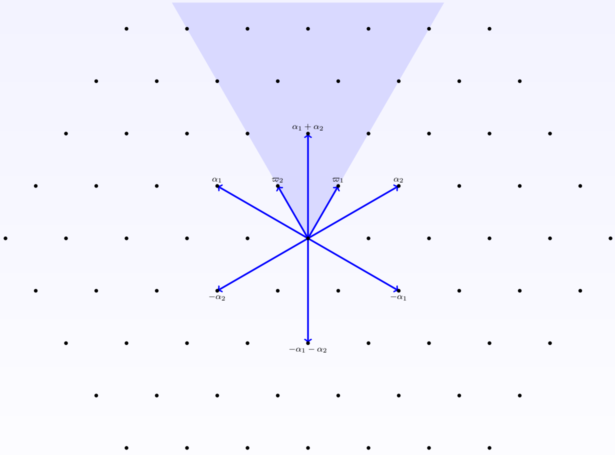


Figura 3.1: X y X^+

Sistema de raíces en tipo A

Para una raíz $\alpha \in \Phi$ denotamos por s_α a la correspondiente reflexión

$$s_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha \rangle \alpha \tag{6}$$

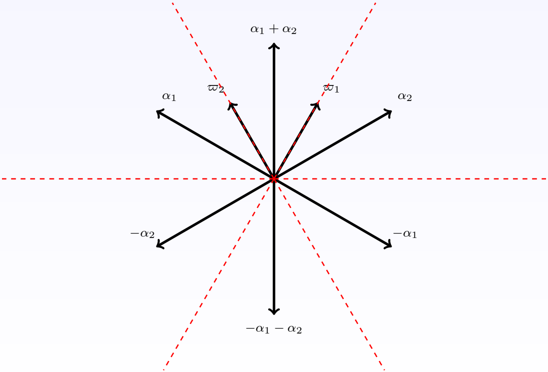
con respecto del hiperplano $H_\alpha = \{v \in E \mid \langle v, \alpha \rangle = 0\}$.

Sistema de raíces en tipo A

Para una raíz $\alpha \in \Phi$ denotamos por s_α a la correspondiente reflexión

$$s_\alpha(v) = v - \langle v, \alpha \rangle \alpha \tag{6}$$

con respecto del hiperplano $H_\alpha = \{v \in E \mid \langle v, \alpha \rangle = 0\}$.



Sistema de raíces en tipo A

Para $\alpha \in \Phi$ y $k \in \mathbb{Z}$ denotamos por $s_{\alpha,k}$ la reflección con respecto al hiperplano

$$H_{\alpha,k} = \{v \in E \mid \langle v, \alpha \rangle = k\} \tag{7}$$

Sistema de raíces en tipo A

Para $\alpha \in \Phi$ y $k \in \mathbb{Z}$ denotamos por $s_{\alpha,k}$ la reflección con respecto al hiperplano

$$H_{\alpha,k} = \{v \in E \mid \langle v, \alpha \rangle = k\} \tag{7}$$

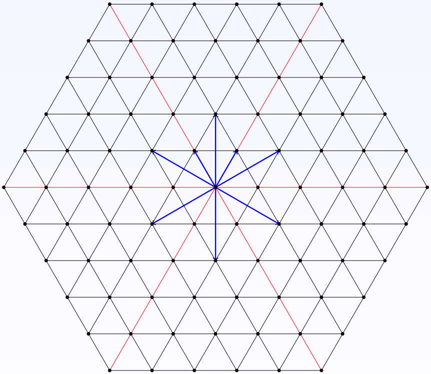


Figura 3.2: Hiperplanos $H_{\alpha,k}$

Sistema de raíces en tipo A

Llamaremos Alcobas a las componentes conexas del espacio

$$E \setminus \bigcup_{\alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}} H_{\alpha,k} \tag{8}$$

Sistema de raíces en tipo A

Llamaremos Alcobas a las componentes conexas del espacio

$$E \backslash \bigcup_{\alpha \in \Phi, k \in \mathbb{Z}} H_{\alpha,k} \tag{8}$$

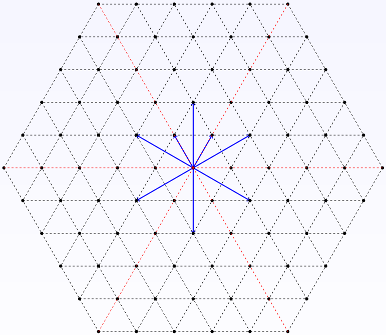
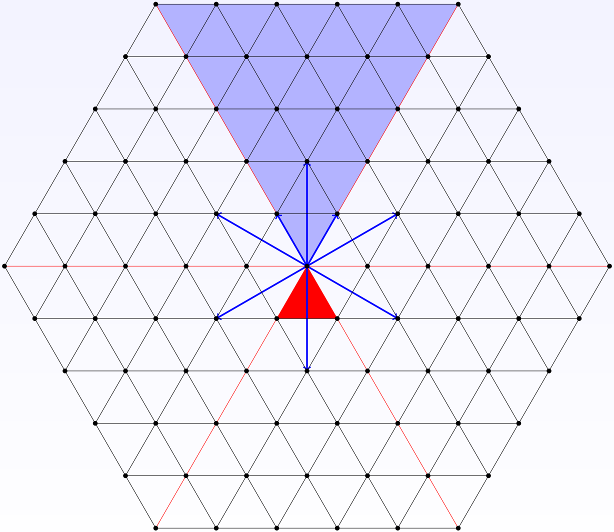


Figura 3.3: Conjunto de Alcobas

Sistema de raíces en tipo A



Sistema de raíces afín

Definición 3.1

- El grupo de Weyl finito W_f, es el grupo generado por las reflecciones s_α para $\alpha \in \Delta$.

Sistema de raíces afín

Definición 3.1

- El grupo de Weyl finito W_f, es el grupo generado por las reflecciones s_α para $\alpha \in \Delta$.
- El grupo de Weyl afín W_a es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y $\mathbb{Z}\Phi$ actuando como traslaciones.

Sistema de raíces afín

Definición 3.1

- El grupo de Weyl finito W_f, es el grupo generado por las reflecciones s_α para $\alpha \in \Delta$.
- El grupo de Weyl afín W_a es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y $\mathbb{Z}\Phi$ actuando como traslaciones.
- El grupo de Weyl extendido W_e es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y X actuando como traslaciones.

Sistema de raíces afín

Definición 3.1

- El grupo de Weyl finito W_f, es el grupo generado por las reflecciones s_α para $\alpha \in \Delta$.
- El grupo de Weyl afín W_a es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y $\mathbb{Z}\Phi$ actuando como traslaciones.
- El grupo de Weyl extendido W_e es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y X actuando como traslaciones.
- Llamamos a $C_0 = \{\lambda \in E | -1 < \langle \lambda, \alpha \rangle < 0 \ \forall \ \alpha \in \Phi^+\}$ la alcoba fundamental. En general la aplicación: $w \to wC_0$ define una biyección entre W_a y el conjunto de alcobas.

Sistema de raíces afín

Definición 3.1

- El grupo de Weyl finito W_f, es el grupo generado por las reflecciones s_α para $\alpha \in \Delta$.
- El grupo de Weyl afín W_a es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y $\mathbb{Z}\Phi$ actuando como traslaciones.
- El grupo de Weyl extendido W_e es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y X actuando como traslaciones.
- Llamamos a $C_0 = \{\lambda \in E | -1 < \langle \lambda, \alpha \rangle < 0 \; \forall \; \alpha \in \Phi^+\}$ la alcoba fundamental. En general la aplicación: $w \to wC_0$ define una biyección entre W_a y el conjunto de alcobas.
- Definimos una función largo $\ell : W_e \to \mathbb{N}$ tal que ℓ cuenta la cantidad de hiperplanos que separan C_0 de wC_0.

Sistema de raíces afín

Definición 3.1

- El grupo de Weyl finito W_f, es el grupo generado por las reflecciones s_α para $\alpha \in \Delta$.
- El grupo de Weyl afín W_a es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y $\mathbb{Z}\Phi$ actuando como traslaciones.
- El grupo de Weyl extendido W_e es el grupo generado por las reflecciones s_α con $\alpha \in \Delta$ y X actuando como traslaciones.
- Llamamos a $C_0 = \{\lambda \in E | -1 < \langle \lambda, \alpha \rangle < 0 \; \forall \; \alpha \in \Phi^+\}$ la alcoba fundamental. En general la aplicación: $w \to wC_0$ define una biyección entre W_a y el conjunto de alcobas.
- Definimos una función largo $\ell : W_e \to \mathbb{N}$ tal que ℓ cuenta la cantidad de hiperplanos que separan C_0 de wC_0.
- sea Ω el subgrupo de W_e de elementos de largo 0. Ω actúa en C_0 permutando sus muros.

Sistema de raíces afín

Función $\theta(\lambda)$

Sea ω_0 el elemento mas largo en W_f y $\lambda \in X$.

Sistema de raíces afín

Función $\theta(\lambda)$

Sea ω_0 el elemento mas largo en W_f y $\lambda \in X$.
$\omega_0(C_0) + \lambda$ es una alcoba, entonces debe de existir un único elemento $\theta(\lambda)$ en W_a tal que $\theta(\lambda)(C_0) = \omega_0(C_0) + \lambda$. Sea t_λ la traslación por λ. Entonces, la aplicación:

Sistema de raíces afín

Función $\theta(\lambda)$

Sea ω_0 el elemento mas largo en W_f y $\lambda \in X$.
$\omega_0(C_0) + \lambda$ es una alcoba, entonces debe de existir un único elemento $\theta(\lambda)$ en W_a tal que $\theta(\lambda)(C_0) = \omega_0(C_0) + \lambda$. Sea t_λ la traslación por λ. Entonces, la aplicación:

$$\lambda \to \theta(\lambda)^{-1} t_\lambda \omega_0 \tag{9}$$

es un Homomorfismo sobreyectivo entre X y Ω con kernel $\mathbb{Z}\Phi$.

Sistema de raíces afín

Función $\theta(\lambda)$

Sea ω_0 el elemento mas largo en W_f y $\lambda \in X$.
$\omega_0(C_0) + \lambda$ es una alcoba, entonces debe de existir un único elemento $\theta(\lambda)$ en W_a tal que $\theta(\lambda)(C_0) = \omega_0(C_0) + \lambda$. Sea t_λ la traslación por λ. Entonces, la aplicación:

$$\lambda \to \theta(\lambda)^{-1} t_\lambda \omega_0 \tag{9}$$

es un Homomorfismo sobreyectivo entre X y Ω con kernel $\mathbb{Z}\Phi$.
Además la aplicación θ cumple una interesante propiedad:

$$\mu \leq \lambda \iff \theta(\mu) \leq \theta(\lambda) \tag{10}$$

compatibilizando el orden de dominancia ($\mu \leq \lambda \Leftrightarrow \lambda - \mu \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$) con el orden de Bruhat.

Contenidos

1 Introducción

2 Sistemas de Coxeter y álgebras de Hecke

3 Sistemas de raíces en tipo A

4 Álgebra de Hecke esférica

5 Bases pre-canónicas

6 Objetivos planteados

Álgebra de Hecke esférica

Definición

Sea $\mathcal{H}$ el álgebra de Hecke de W_a sobre $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ con base estándar $\{H_x\}$ y base de Kazhdan-Lusztig $\{\underline{H}_x\}$. Por convención $q = v^2$.Sea $\underline{H}_f := \underline{H}_{\omega_0}$ y $\sigma \in \Omega$ definimos

$$\mathcal{H}^\sigma := \underline{H}_f \mathcal{H} \bigcap \mathcal{H}\sigma(\underline{H}_f) \subset \mathcal{H}. \tag{11}$$

Análogamente si $\tau, \sigma \in \Omega$, definimos ${}^\tau\mathcal{H}^\sigma := \tau(\underline{H}_f)\mathcal{H} \bigcap \mathcal{H}\sigma(\underline{H}_f)$ ($\mathcal{H}^\sigma \cong {}^\tau\mathcal{H}^{\tau\sigma}$ como $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$- módulos bajo la aplicación $x \mapsto \tau(x)$). Entonces definimos el álgebra de Hecke esférica como:

Álgebra de Hecke esférica

Definición

Sea $\mathcal{H}$ el álgebra de Hecke de W_a sobre $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$ con base estándar $\{H_x\}$ y base de Kazhdan-Lusztig $\{\underline{H}_x\}$. Por convención $q = v^2$.Sea $\underline{H}_f := \underline{H}_{\omega_0}$ y $\sigma \in \Omega$ definimos

$$\mathcal{H}^\sigma := \underline{H}_f \mathcal{H} \bigcap \mathcal{H}\sigma(\underline{H}_f) \subset \mathcal{H}. \tag{11}$$

Análogamente si $\tau, \sigma \in \Omega$, definimos ${}^\tau\mathcal{H}^\sigma := \tau(\underline{H}_f)\mathcal{H} \bigcap \mathcal{H}\sigma(\underline{H}_f)$ ($\mathcal{H}^\sigma \cong {}^\tau\mathcal{H}^{\tau\sigma}$ como $\mathbb{Z}[v, v^{-1}]$- módulos bajo la aplicación $x \mapsto \tau(x)$). Entonces definimos el álgebra de Hecke esférica como:

$$\tilde{\mathcal{H}} := \bigoplus_{\sigma \in \Omega} \mathcal{H}^\sigma. \tag{12}$$

con multiplicación definida vía

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{H}^\tau \times \mathcal{H}^\sigma & \to & \mathcal{H}^\tau \times {}^\tau\mathcal{H}^{\tau\sigma} & \to & \mathcal{H}^{\tau\sigma} \\ (x, y) & \mapsto & (x, \tau(y)) & \mapsto & \dfrac{v^{\ell(\omega_0)}}{\pi_{W_f}(v^2)} x\tau(y). \end{array} \tag{13}$$

donde $\pi_{W_f}(q) = \sum_{w \in W_f} q^{\ell(w)}$.

Álgebra de Hecke esférica

Definición 4.1 (Bases para el álgebra de Hecke esférica)

- Para $\lambda \in X^+$ y $\sigma = \theta(\lambda)^{-1} t_\lambda w_0$ definimos:

$$H_\lambda := \sum_{x \in W_f \theta(\lambda) \sigma(W_f)} v^{\ell(\theta(\lambda)) - \ell(x)} H_x. \tag{14}$$

Álgebra de Hecke esférica

Definición 4.1 (Bases para el álgebra de Hecke esférica)

i Para $\lambda \in X^+$ y $\sigma = \theta(\lambda)^{-1} t_\lambda w_0$ definimos:

$$H_\lambda := \sum_{x \in W_f \theta(\lambda) \sigma(W_f)} v^{\ell(\theta(\lambda)) - \ell(x)} H_x. \tag{14}$$

ii Para $\lambda \in X^+$ definimos

$$\underline{H}_\lambda := \underline{H}_{\theta(\lambda)}. \tag{15}$$

Álgebra de Hecke esférica

Definición 4.1 (Bases para el álgebra de Hecke esférica)

i Para $\lambda \in X^+$ y $\sigma = \theta(\lambda)^{-1} t_\lambda w_0$ definimos:

$$H_\lambda := \sum_{x \in W_f \theta(\lambda) \sigma(W_f)} v^{\ell(\theta(\lambda)) - \ell(x)} H_x. \tag{14}$$

ii Para $\lambda \in X^+$ definimos

$$\underline{H}_\lambda := \underline{H}_{\theta(\lambda)}. \tag{15}$$

El conjunto $\{H_\lambda \mid \lambda \in X^+\}$ es una base y le llamaremos la base estándar de $\tilde{\mathcal{H}}$.

Álgebra de Hecke esférica

Definición 4.1 (Bases para el álgebra de Hecke esférica)

i Para $\lambda \in X^+$ y $\sigma = \theta(\lambda)^{-1} t_\lambda w_0$ definimos:

$$H_\lambda := \sum_{x \in W_f \theta(\lambda) \sigma(W_f)} v^{\ell(\theta(\lambda)) - \ell(x)} H_x. \tag{14}$$

ii Para $\lambda \in X^+$ definimos

$$\underline{H}_\lambda := \underline{H}_{\theta(\lambda)}. \tag{15}$$

El conjunto $\{H_\lambda \mid \lambda \in X^+\}$ es una base y le llamaremos la base estándar de $\tilde{\mathcal{H}}$.
El conjunto $\{\underline{H}_\lambda \mid \lambda \in X^+\}$ es una base y le llamaremos base de Kazhdan-Lusztig de $\tilde{\mathcal{H}}$.

Álgebra de Hecke esférica

Definición 4.1 (Bases para el álgebra de Hecke esférica)

i Para $\lambda \in X^+$ y $\sigma = \theta(\lambda)^{-1} t_\lambda w_0$ definimos:

$$H_\lambda := \sum_{x \in W_f \theta(\lambda) \sigma(W_f)} v^{\ell(\theta(\lambda)) - \ell(x)} H_x. \tag{14}$$

ii Para $\lambda \in X^+$ definimos

$$\underline{H}_\lambda := \underline{H}_{\theta(\lambda)}. \tag{15}$$

El conjunto $\{H_\lambda \mid \lambda \in X^+\}$ es una base y le llamaremos la base estándar de $\tilde{\mathcal{H}}$.
El conjunto $\{\underline{H}_\lambda \mid \lambda \in X^+\}$ es una base y le llamaremos base de Kazhdan-Lusztig de $\tilde{\mathcal{H}}$.
En particular tenemos la descomposición:

$$\underline{H}_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} h_{\mu,\lambda}(v) H_\mu \tag{16}$$

donde los polinomios $h_{\mu,\lambda}(v) = h_{\theta(\mu),\theta(\lambda)}(v)$ definidos anteriormente.

Contenidos

1. Introducción
2. Sistemas de Coxeter y álgebras de Hecke
3. Sistemas de raíces en tipo A
4. Álgebra de Hecke esférica
5. Bases pre-canónicas
6. Objetivos planteados

Bases pre- canónicas

Definición

Para $x \in W_a$ definimos

$$\mathbf{N}_x = \sum_{y \leq x} v^{\ell(x)-\ell(y)} H_y$$

donde $\leq$ corresponde al orden de Bruhat de W_a como sistema de Coxeter

Bases pre- canónicas

Definición

Para $x \in W_a$ definimos

$$\mathbf{N}_x = \sum_{y \leq x} v^{\ell(x)-\ell(y)} H_y$$

donde $\leq$ corresponde al orden de Bruhat de W_a como sistema de Coxeter

Descomposición atómica

Para $\lambda \in X^+$ definimos

$$\underline{H}_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} a_{\lambda,\mu}(q) \mathbf{N}_\mu$$

donde $q = v^2$, $\leq$ es el orden de dominancia ($\mu \leq \lambda \Leftrightarrow \lambda - \mu \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$) y $N_\mu = N_{\theta(\mu)}$. Llamamos a los polinomios $\alpha_{\lambda,\mu}(q)$ polinomios atómicos.

Bases pre- canónicas

Definición

Para $x \in W_a$ definimos

$$\mathbf{N}_x = \sum_{y \leq x} v^{\ell(x)-\ell(y)} H_y$$

donde $\leq$ corresponde al orden de Bruhat de W_a como sistema de Coxeter

Descomposición atómica

Para $\lambda \in X^+$ definimos

$$\underline{H}_\lambda = \sum_{\mu \leq \lambda} a_{\lambda,\mu}(q) \mathbf{N}_\mu$$

donde $q = v^2$, $\leq$ es el orden de dominancia ($\mu \leq \lambda \Leftrightarrow \lambda - \mu \in \sum_{\alpha \in \Delta} \mathbb{N}\alpha$) y $N_\mu = N_{\theta(\mu)}$. Llamamos a los polinomios $\alpha_{\lambda,\mu}(q)$ polinomios atómicos.

Mediante trabajos de (Lascoux,1991) y (Shimozono, 2001) se probó que la descomposición atómica es positiva en tipo A_n.

Bases pre- canónicas

Sea $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$.
Diremos que $\lambda \in X$ es regular si no hay reflexión $s \in W_f$ que fije $\lambda + \rho$.
Si lambda es regular definimos $w_\lambda \in W_f$ cómo el único elemento tal que $w \cdot \lambda \in X^+$ ($w \cdot \lambda = w(\lambda+\rho) - \rho$). Si $\lambda \in X$ no es regular, le llamaremos singular.

Bases pre- canónicas

Sea $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$.
Diremos que $\lambda \in X$ es regular si no hay reflexión $s \in W_f$ que fije $\lambda + \rho$.
Si lambda es regular definimos $w_\lambda \in W_f$ cómo el único elemento tal que $w \cdot \lambda \in X^+$ ($w \cdot \lambda = w(\lambda+\rho) - \rho$). Si $\lambda \in X$ no es regular, le llamaremos singular.
A continuación definimos

$$\underline{H}_\lambda = \begin{cases} (-1)^{\ell(w_\lambda)}\underline{H}_{w_\lambda \cdot \lambda} & \text{si } \lambda \text{ es regular} \\ 0 & \text{si } \lambda \text{ es singular} \end{cases}.$$

Para $\alpha \in \Phi$ si $\alpha = \sum_{\alpha_i\in\Delta} m_i\alpha_i$ definimos la altura de α como $ht(\alpha) := \sum_{\alpha_i\in\Delta} m_i$.
Además definimos $\Phi^{\geq i}$ como las $\alpha \in \Phi^+$ con altura mayor o igual que i.

Bases pre- canónicas

Sea $\rho = \frac{1}{2}\sum_{\alpha\in\Phi^+}\alpha$.
Diremos que $\lambda \in X$ es regular si no hay reflexión $s \in W_f$ que fije $\lambda + \rho$.
Si lambda es regular definimos $w_\lambda \in W_f$ cómo el único elemento tal que $w \cdot \lambda \in X^+$ ($w \cdot \lambda = w(\lambda+\rho)-\rho$). Si $\lambda \in X$ no es regular, le llamaremos singular.
A continuación definimos

$$\underline{H}_\lambda = \begin{cases} (-1)^{\ell(w_\lambda)}\underline{H}_{w_\lambda\cdot\lambda} & \text{si } \lambda \text{ es regular} \\ 0 & \text{si } \lambda \text{ es singular} \end{cases}.$$

Para $\alpha \in \Phi$ si $\alpha = \sum_{\alpha_i\in\Delta} m_i\alpha_i$ definimos la altura de α como $ht(\alpha) := \sum_{\alpha_i\in\Delta} m_i$.
Además definimos $\Phi^{\geq i}$ como las $\alpha \in \Phi^+$ con altura mayor o igual que i.

Teorema 5.1 (Descomposición anti-atómica)

Sea $\lambda \in X^+$

$$\mathbf{N}_\lambda = \sum_{I\subset\Phi^{\geq 2}} (-q)^{|I|}\underline{H}_{\lambda-\sum_{\alpha\in I}\alpha}$$

Bases pre- canónicas

Definición 5.1 (Bases pre - canónicas)

Para $\lambda \in X^+$ e $i \geq 2$ definimos:

$$\mathbf{N}_\lambda^i = \sum_{I \subset \Phi^{\geq i}} (-q)^{|I|} \underline{H}_{\lambda - \sum_{\alpha \in I} \alpha}$$

Bases pre- canónicas

Definición 5.1 (Bases pre - canónicas)

Para $\lambda \in X^+$ e $i \geq 2$ definimos:

$$\mathbf{N}_\lambda^i = \sum_{I \subset \Phi^{\geq i}} (-q)^{|I|} \underline{H}_{\lambda - \sum_{\alpha \in I} \alpha}$$

Teorema 5.2

Para $i \geq 2$ los conjuntos $\{\mathbf{N}_\lambda^i \in \tilde{\mathcal{H}} \mid \lambda \in X^+\}$ son bases para $\tilde{\mathcal{H}}$ y les conoceremos como las bases pre-canónicas.

bases pre- canónicas

Nota 5.1

Observe que de acuerdo a la definición anterior $\mathbf{N}_\lambda = \mathbf{N}_\lambda^2$ y que

$$\underline{H}_\lambda = \mathbf{N}_\lambda^{m+1} = \mathbf{N}_\lambda^{m+2} = \cdots$$

donde m es la altura de la raíz mas alta.

Contenidos

1. Introducción
2. Sistemas de Coxeter y álgebras de Hecke
3. Sistemas de raíces en tipo A
4. Álgebra de Hecke esférica
5. Bases pre-canónicas
6. Objetivos planteados

Primer gran objetivo

Conjetura 6.1 (LPP, 2021)

En tipo A_n, si

$$\mathbf{N}_{\lambda}^{i+1} = \sum_{\mu \in X^+} r^i_{\lambda,\mu}(q) \mathbf{N}^i_{\mu}$$

entonces $r^i_{\lambda,\mu}(q) \in \mathbb{N}[q]$

Primer gran objetivo

Conjetura 6.1 (LPP, 2021)

En tipo A_n, si

$$\mathbf{N}_\lambda^{i+1} = \sum_{\mu \in X^+} r_{\lambda,\mu}^i(q)\mathbf{N}_\mu^i$$

entonces $r_{\lambda,\mu}^i(q) \in \mathbb{N}[q]$

En primer lugar es interesante mostrar aquella información que hemos obtenido y que apoya la veracidad de la presente conjetura.

Sustento para la conjetura 6.1

Teorema 6.1 (LPP)

Para $n \geq 2$, si $\frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n$. Para $\lambda \in X^+$ tenemos lo siguiente

$$\mathbf{N}_\lambda^{i+1} = \sum_{\mu \leq_i \lambda} q^{\frac{1}{i} ht(\lambda - \mu)} \mathbf{N}_\mu^i. \tag{17}$$

donde $\mu \leq_i \lambda$ significa que $\lambda - \mu$ puede ser escrito como combinación lineal positiva integral de elementos en Φ^i (raíces de altura i).

Sustento para la conjetura 6.1

Teorema 6.1 (LPP)

Para $n \geq 2$, si $\frac{n}{2} + 1 \leq i \leq n$. Para $\lambda \in X^+$ tenemos lo siguiente

$$\mathbf{N}_{\lambda}^{i+1} = \sum_{\mu \leq_i \lambda} q^{\frac{1}{i} ht(\lambda - \mu)} \mathbf{N}_{\mu}^{i}. \tag{17}$$

donde $\mu \leq_i \lambda$ significa que $\lambda - \mu$ puede ser escrito como combinación lineal positiva integral de elementos en Φ^i (raíces de altura i).

Teorema 6.2

Para $n \geq 2$, si $\frac{n+2}{3} < i \leq n$. Para $\lambda \in X^+$ tenemos

$$r_{\lambda,\mu}^{i} \in \mathbb{N}[q] \tag{18}$$

Sustento para la conjetura 6.1

Teorema 6.3 (LPP)

Para $n = 2, 3, 4$, *Si* $2 \leq i \leq n$. *Para* $\lambda, \mu \in X^+$ *tenemos*

$$r^i_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}[q] \tag{19}$$

Sustento para la conjetura 6.1

Teorema 6.3 (LPP)

Para $n = 2, 3, 4$, *Si* $2 \leq i \leq n$. *Para* $\lambda, \mu \in X^+$ *tenemos*

$$r^i_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}[q] \tag{19}$$

Teorema 6.4

Para $n = 5, 6$, *Si* $2 \leq i \leq n$. *Para* $\lambda, \mu \in X^+$ *tenemos*

$$r^i_{\lambda,\mu} \in \mathbb{N}[q] \tag{20}$$

Sustento para la conjetura 6.1

Ejemplo 6.1 ($\mathbf{N}^2$ en $\mathbf{N}^3$)

Para $n = 3$ y $\lambda = a\varpi_1 + b\varpi_2 + c\varpi_3$ la siguiente tabla describe la descomposición de $\mathbf{N}^2_\lambda$ en $\mathbf{N}^3_\mu$

Row	a	b	c	Decomposition
1	0	≥ 1	≥ 1	$\mathbf{N}^3_\lambda - q\mathbf{N}^3_{\lambda-\alpha_{23}}$
2	0	0	≥ 0	$\mathbf{N}^3_\lambda$
3	0	1	0	$\mathbf{N}^3_\lambda$
4	0	≥ 2	0	$\mathbf{N}^3_\lambda - q^2\mathbf{N}^3_{\lambda-\alpha_{12}-\alpha_{23}}$
5	≥ 1	≥ 1	0	$\mathbf{N}^3_\lambda - q\mathbf{N}^3_{\lambda-\alpha_{12}}$
6	≥ 0	0	0	$\mathbf{N}^3_\lambda$
7	≥ 1	1	≥ 1	$\mathbf{N}^3_\lambda - q\mathbf{N}^3_{\lambda-\alpha_{12}} - q\mathbf{N}^3_{\lambda-\alpha_{23}}$
8	≥ 1	0	≥ 1	$\mathbf{N}^3_\lambda - q^2\mathbf{N}^3_{\lambda-\alpha_{13}}$

Sustento para la conjetura 6.1

Ejemplo 6.2 ($\mathbf{N}^3$ en $\mathbf{N}^2$)

Sea $\lambda = (2,1,1)_\varpi$, entonces de acuerdo a la tabla anterior

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} - q\mathbf{N}^3_{(1,0,2)} - q\mathbf{N}^3_{(3,0,0)} \\ \iff \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} + q\mathbf{N}^2_{(1,0,2)} + q\mathbf{N}^3_{(3,0,0)} \end{aligned} \tag{21}$$

Sustento para la conjetura 6.1

Ejemplo 6.2 ($\mathbf{N}^3$ en $\mathbf{N}^2$)

Sea $\lambda = (2,1,1)_\varpi$, entonces de acuerdo a la tabla anterior

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} - q\mathbf{N}^3_{(1,0,2)} - q\mathbf{N}^3_{(3,0,0)} \\ \iff \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} + q\mathbf{N}^3_{(1,0,2)} + q\mathbf{N}^3_{(3,0,0)} \end{aligned} \tag{21}$$

nuevamente a partir de la información en la tabla anterior podemos continuar este procedimiento obteniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2_{(1,0,2)} &= \mathbf{N}^3_{(1,0,2)} - q^2\mathbf{N}^3_{(0,0,1)} \\ \mathbf{N}^2_{(3,0,0)} &= \mathbf{N}^3_{(3,0,0)} \\ \iff \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} + q\mathbf{N}^2_{(1,0,2)} + q^3\mathbf{N}^3_{(0,0,1)} + q\mathbf{N}^2_{(3,0,0)} \end{aligned} \tag{22}$$

Sustento para la conjetura 6.1

Ejemplo 6.2 ($\mathbf{N}^3$ en $\mathbf{N}^2$)

Sea $\lambda = (2,1,1)_{\varpi}$, entonces de acuerdo a la tabla anterior

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} - q\mathbf{N}^3_{(1,0,2)} - q\mathbf{N}^3_{(3,0,0)} \\ \iff \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} + q\mathbf{N}^3_{(1,0,2)} + q\mathbf{N}^3_{(3,0,0)} \end{aligned} \tag{21}$$

nuevamente a partir de la información en la tabla anterior podemos continuar este procedimiento obteniendo

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2_{(1,0,2)} &= \mathbf{N}^3_{(1,0,2)} - q^2\mathbf{N}^3_{(0,0,1)} \\ \mathbf{N}^2_{(3,0,0)} &= \mathbf{N}^3_{(3,0,0)} \\ \iff \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} + q\mathbf{N}^2_{(1,0,2)} + q^3\mathbf{N}^3_{(0,0,1)} + q\mathbf{N}^2_{(3,0,0)} \end{aligned} \tag{22}$$

finalmente según la información en la tabla obtenemos la descomposición de $\mathbf{N}^3_{\lambda}$ en función de la segunda base pre-canonica y en donde se observa la positividad de los coeficientes

$$\begin{aligned} \mathbf{N}^2_{(0,0,1)} &= \mathbf{N}^3_{(0,0,1)} \\ \iff \mathbf{N}^3_{(2,1,1)} &= \mathbf{N}^2_{(2,1,1)} + q\mathbf{N}^2_{(1,0,2)} + q^3\mathbf{N}^2_{(0,0,1)} + q\mathbf{N}^2_{(3,0,0)} \end{aligned} \tag{23}$$

Segundo objetivo

Conjetura 6.1

En tipo A_n. Sea $\lambda \in X^+$, si

$$\mathbf{N}_\lambda^{i+1} = \sum_{\mu \in X^+} r^i_{\lambda,\mu}(q)\mathbf{N}^i_\mu \tag{24}$$

entonces $r^i_{\lambda,\mu}(q) \in \mathbb{N}[q]$.

Segundo objetivo

Conjetura 6.1

En tipo A_n. Sea $\lambda \in X^+$, si

$$\mathbf{N}_\lambda^{i+1} = \sum_{\mu \in X^+} r_{\lambda,\mu}^i(q) \mathbf{N}_\mu^i \tag{24}$$

entonces $r_{\lambda,\mu}^i(q) \in \mathbb{N}[q]$.

- Es interesante observar otros sistemas de raíces, estudiando las descomposiciones y una posible positividad en ellos.

Segundo objetivo

Conjetura 6.1

En tipo A_n. Sea $\lambda \in X^+$, si

$$\mathbf{N}_\lambda^{i+1} = \sum_{\mu \in X^+} r^i_{\lambda,\mu}(q)\mathbf{N}^i_\mu \tag{24}$$

entonces $r^i_{\lambda,\mu}(q) \in \mathbb{N}[q]$.

- Es interesante observar otros sistemas de raíces, estudiando las descomposiciones y una posible positividad en ellos.
- Sabemos por Lecouvey y Lenart que la conjetura para un sistema de raíces arbitrario es falsa, pues tipo $D4$ entregan un contraejemplo para los polinomios atómicos, aunque aun así es interesante saber cuando y en que contextos se rompe la postividad, por lo que esto también constituye un tema interesante de estudio.

Agradecimientos

Yamil Sagurie

Gracias por su atención