

Formas Seminormales para el Álgebra de Temperley-Lieb

Katherine Ormeño Bastías
Supervisado por PhD. Steen Ryom-Hansen

Universidad de Talca
Enero, 2023

Tabla de contenidos

- 1 Álgebra de Temperley-Lieb
- 2 Idempotentes de Jones-Wenzl
- 3 Álgebras Celulares
- 4 Elementos de Jucys-Murphy
- 5 El caso Separado
- 6 El caso No separado
- 7 Referencias

Álgebra de Temperley-Lieb

Definición

El álgebra de Temperley-Lieb $\text{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ es la \mathbb{Q} -álgebra asociativa unital con generadores U_1, U_2, \dots, U_{n-1} y relaciones

$$U_i^2 = -2U_i, \quad \text{si } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

$$U_i U_j U_i = U_i, \quad \text{si } |i-j| = 1 \quad (2)$$

$$U_i U_j = U_j U_i, \quad \text{si } |i-j| > 1. \quad (3)$$

Álgebra de Temperley-Lieb

Definición

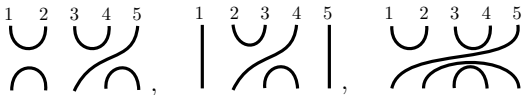
El álgebra de Temperley-Lieb $\text{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ es la \mathbb{Q} -álgebra asociativa unital con generadores U_1, U_2, \dots, U_{n-1} y relaciones

$$U_i^2 = -2U_i, \quad \text{si } i = 1, 2, \dots, n-1 \quad (1)$$

$$U_i U_j U_i = U_i, \quad \text{si } |i-j| = 1 \quad (2)$$

$$U_i U_j = U_j U_i, \quad \text{si } |i-j| > 1. \quad (3)$$

$\text{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ es un álgebra diagramatical, por ejemplo para $n = 5$ sean



los llamaremos D_1 , D_2 y D_3 .

El producto en $\mathbb{T}L_n^{\mathbb{Q}}$ es por concatenación:

$$D_1 D_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ | & | & | & | & | \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \end{array} \end{array} = D_3$$

$$D_1 D_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} & \text{---} \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \end{array} \end{array} = -2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \end{array} \\ \begin{array}{ccccc} \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \\ \cup & \cup & \cup & \cup & \cup \end{array} \end{array} = -2D_3$$

El producto en $\mathbb{T}\mathbb{L}_n^{\mathbb{Q}}$ es por concatenación:

$$D_1 D_2 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \text{Diagram 1} \end{array} = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \text{Diagram 2} \end{array} = D_3$$

The diagram on the left shows two diagrams concatenated vertically. The top diagram has strands 1, 2, 3, 4, 5 with crossings between (1,2), (2,3), and (3,4). The bottom diagram has strands 1, 2, 3, 4, 5 with crossings between (1,2), (2,3), and (3,4). A red dashed line separates them.

The diagram on the right shows a single diagram with strands 1, 2, 3, 4, 5 and crossings between (1,2), (2,3), and (3,4).

$$D_1 D_3 = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \text{Diagram 1} \end{array} = -2 \begin{array}{c} \begin{array}{ccccc} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \end{array} \\ \text{Diagram 2} \end{array} = -2D_3$$

The diagram on the left shows two diagrams concatenated vertically. The top diagram has strands 1, 2, 3, 4, 5 with crossings between (1,2), (2,3), and (3,4). The bottom diagram has strands 1, 2, 3, 4, 5 with crossings between (1,2), (2,3), and (3,4). A red dashed line separates them.

The diagram on the right shows a single diagram with strands 1, 2, 3, 4, 5 and crossings between (1,2), (2,3), and (3,4).

En general,

$$\mathbb{1} \mapsto \begin{array}{c} 1 & 2 & \dots & n \\ | & | & & | \end{array}, \quad \mathbb{U}_i \mapsto \begin{array}{c} 1 & 2 & \dots & i & \dots & n \\ | & | & & \cup \\ & & & \cap \\ | & | & & | & \dots & | \end{array}$$

Idempotentes de Jones-Wenzl

Definición

Los idempotentes de Jones-Wenzl denotados JW_n , son los **únicos idempotentes no nulos** de $\mathbb{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ que satisfacen $JW_n U_i = U_i JW_n = 0$, si $1 \leq i < n$.

Idempotentes de Jones-Wenzl

Definición

Los idempotentes de Jones-Wenzl denotados JW_n , son los **únicos idempotentes no nulos** de $\mathcal{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ que satisfacen $JW_n \mathbb{U}_i = \mathbb{U}_i JW_n = 0$, si $1 \leq i < n$.

Utilizaremos la siguiente notación diagramatical para JW_n

$$JW_n = \begin{array}{c} 1 \quad \dots \quad n \\ | \quad \dots \quad | \quad | \quad | \\ \boxed{\text{JW}_n} \\ | \quad \dots \quad | \quad | \quad | \end{array} \in \mathcal{TL}_n^{\mathbb{Q}}$$

Idempotentes de Jones-Wenzl

Definición

Los idempotentes de Jones-Wenzl denotados JW_n , son los **únicos idempotentes no nulos** de $\mathbb{T}L_n^{\mathbb{Q}}$ que satisfacen $JW_n \cup_i = \cup_i JW_n = 0$, si $1 \leq i < n$.

Utilizaremos la siguiente notación diagramatical para JW_n

$$JW_n = \begin{array}{c} \begin{array}{ccccccc} | & \dots & | & | & \dots & | & | \\ \hline & & JW_n & & & & \\ \hline & & & & & & \\ | & \dots & | & | & \dots & | & | \end{array} \end{array} \in \mathbb{T}L_n^{\mathbb{Q}}$$

Por ejemplo

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} | & | \\ \hline JW_2 \\ \hline | & | \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \end{array} + \frac{1}{2} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \end{array}$$

$$\begin{array}{c} \begin{array}{c} | & | & | \\ \hline JW_3 \\ \hline | & | & | \end{array} \end{array} = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} + \frac{2}{3} \begin{array}{c} | \\ \cup \\ \cap \\ | \end{array} + \frac{2}{3} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \\ | \\ | \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \\ \cup \\ \cap \end{array} + \frac{1}{3} \begin{array}{c} \cup \\ \cap \\ \cap \\ \cup \end{array}$$

Fórmula recursiva

$$\begin{array}{c} | \\ \dots \\ \text{JW}_n \\ \dots \\ | \end{array} = \begin{array}{c} | \\ \dots \\ \text{JW}_{n-1} \\ \dots \\ | \end{array} + \frac{n-1}{n} \begin{array}{c} \dots \\ | \\ \text{JW}_{n-1} \\ | \\ \dots \\ | \\ \text{JW}_{n-1} \\ | \\ \dots \end{array}$$

The diagram illustrates the recursive formula for the Jones-Wenzl idempotent JW_n . On the left, a box labeled JW_n has n vertical lines extending from its top and bottom edges. This is equal to a box labeled JW_{n-1} with $n-1$ vertical lines, plus a fraction $\frac{n-1}{n}$ multiplied by a more complex diagram. The complex diagram consists of two JW_{n-1} boxes stacked vertically, with $n-1$ lines on the left and $n-1$ lines on the right. The top and bottom lines of the top box are connected by a U-shaped line that loops back to the right, and the top and bottom lines of the bottom box are connected by a U-shaped line that loops back to the left.

Fórmula recursiva

$$\text{JW}_n = \text{JW}_{n-1} + \frac{n-1}{n} \left(\text{JW}_{n-1} \text{ crossing JW}_{n-1} \right)$$

Con esta fórmula se obtiene

$$\text{JW}_n \text{ crossing JW}_m = (-1)^m \frac{n+1}{n-m+1} \text{JW}_{n-m}$$

De la fórmula recursiva se verifica que, para $m < n$, $\text{JW}_n \text{JW}_m = \text{JW}_n$, o diagramáticamente

$$\text{JW}_n \text{ JW}_m = \text{JW}_n$$

Álgebras Celulares

Definición (Graham y Lehrer)

Sea A una R -álgebra asociativa unital, donde R es un anillo conmutativo. Un dato celular para A es un triple (Λ, T, C) donde $\Lambda = (\Lambda, >)$ es un poset finito, T es una función de Λ a un conjunto finito y C es una función inyectiva

$$C : \bigsqcup_{\lambda \in \Lambda} T(\lambda) \times T(\lambda) \rightarrow A, (s, t) \in T(\lambda) \times T(\lambda) \mapsto C_{st}^\lambda$$

El dato celular debe satisfacer:

1. La imagen de C , esto es $im(C) = \{C_{st}^\lambda \mid (s, t) \in T(\lambda) \times T(\lambda), \lambda \in \Lambda\}$, es una R -base de A .
2. Para todo $a \in A$, tenemos

$$C_{st}^\lambda a = \sum_{v \in T(\lambda)} r_{tva} C_{sv}^\lambda \pmod{A^\lambda}$$

donde A^λ es el R -submódulo de A generado por $\{C_{st}^\mu \mid \mu < \lambda\}$.

3. La función R -lineal $*$ de A dada por $C_{st}^\lambda \mapsto C_{ts}^\lambda$ es un anti-isomorfismo de álgebras.

Un álgebra equipada con un dato celular (Λ, T, C) es llamada álgebra celular, con base celular $im(C)$.

Temperley-Lieb es un ejemplo de álgebra celular.

- 1 $\Lambda = Par_n^{\leq 2}$
- 2 $T(\lambda) = Std(\lambda)$, para cada $\lambda \in Par_n^{\leq 2}$

Sea $\lambda = (7, 4)$ y

$$t := \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 7 & 8 & 9 & 11 \\ \hline 4 & 5 & 6 & 10 & & & \\ \hline \end{array} \mapsto C_t^\lambda = \begin{array}{c} \text{Diagram with 3 arcs and 3 vertical lines} \end{array}$$

$$(\mathfrak{s}, t) := \left(\begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 5 \\ \hline 2 & 4 & \\ \hline \end{array}, \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 3 & 4 \\ \hline 2 & 5 & \\ \hline \end{array} \right) \mapsto C_{\mathfrak{s}, t}^\lambda = \begin{array}{c} \text{Diagram with 2 crossings and 2 arcs} \end{array}$$

Módulos Celulares

Módulos Celulares

Para un álgebra celular A existe una familia de módulos celulares $\{\Delta(\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$. Elejimos un s_0 arbitrario en $T(\lambda)$ y sea

$$\Delta(\lambda) := \text{Span}_R \{ C_{s_0 t}^\lambda | t \in T(\lambda) \}$$

La acción de A en $\Delta(\lambda)$ está dada por $C_{s_0 t}^\lambda a = \sum_{v \in T(\lambda)} r_{tva} C_{s_0 v}^\lambda$

Módulos Celulares

Módulos Celulares

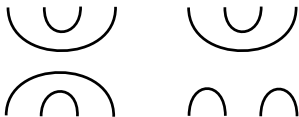
Para un álgebra celular A existe una familia de módulos celulares $\{\Delta(\lambda) | \lambda \in \Lambda\}$. Elejimos un s_0 arbitrario en $T(\lambda)$ y sea

$$\Delta(\lambda) := \text{Span}_R \{ C_{s_0 t}^\lambda | t \in T(\lambda) \}$$

La acción de A en $\Delta(\lambda)$ está dada por $C_{s_0 t}^\lambda a = \sum_{v \in T(\lambda)} r_{tva} C_{s_0 v}^\lambda$

Ejemplo: Sea $n = 4$ y $\lambda = (2, 2)$. Tenemos

$$t = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline \end{array}, \quad s = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline \end{array}$$



Elementos de Jucys-Murphy

Elementos de Jucys-Murphy

Sea A un álgebra celular sobre R con triple (Λ, T, C) , y suponga que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe una estructura de poset $T(\lambda)$, via la relación de orden $<$. Entonces una familia de elementos $\{L_1, L_2, \dots, L_M\}$ recibe el nombre de **JM**-elementos para A si satisface las siguientes condiciones.

- 1 Los L_i 's conmutan y satisfacen $L_i^* = L_i$.
- 2 Para cada $t \in T(\Lambda) := \coprod_{\lambda \in \Lambda} T(\lambda)$ hay una función $c_t : \{1, 2, \dots, M\} \rightarrow R$ tal que se cumple la siguiente fórmula de triangularidad en $\Delta(\lambda)$

$$C_t^\lambda L_i = c_t(i) C_t^\lambda + \sum_{s \in T(\lambda), s < t} a_s C_s^\lambda$$

para algún $a_s \in R$.

Si $\{L_1, L_2, \dots, L_M\}$ es una familia de **JM**-elementos para A , entonces las correspondientes funciones c_t son llamadas *funciones contenido*.



Lema

Existe una sobreyección $\varphi : \mathbb{Q}S_n \rightarrow \text{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ vía $s_i \mapsto U_i + 1$, donde s_i es la transposición $(i, i + 1)$.

Lema

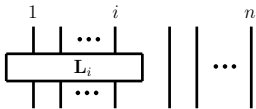
Existe una sobreyección $\varphi : \mathbb{Q}S_n \rightarrow \text{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ vía $s_i \mapsto U_i + 1$, donde s_i es la transposición $(i, i + 1)$.

Definamos los elementos $\{L_1, L_2, \dots, L_n\}$ de $\mathbb{Q}S_n$ vía $L_1 = 0$ y para $i \in \{2, 3, \dots, n\}$

$$L_i := (1, i) + (2, i) + \dots + (i - 1, i)$$

y sea $\mathbf{L}_i := \varphi(L_i)$

Representaremos \mathbf{L}_i diagramáticamente como sigue



Definamos para $t \in \text{Std}(\lambda)$ la función $c_t : \{1, 2, \dots, n\} \rightarrow \mathbb{Z}$ vía

$$c_t(i) = c - r \text{ para } t[r, c] = i$$

El caso Separado

Condición de separación

Se dice que los elementos JM separan $T(\lambda)$ si para $s, t \in T(\lambda)$ con $s \triangleright t$, se tiene que $c_s(i) \neq c_t(i)$ para algún i con $1 \leq i \leq M$.

En $\mathbb{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ los tableaux s y t son estándar, por lo que la condición de separación se cumple. Entonces $\mathbb{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ es semisimple.

Bajo la condición de separación se define

$$\mathbb{E}_t = \prod_{c \in \mathcal{C}} \prod_{\substack{i=1, \dots, n \\ c \neq c_t(i)}} \frac{\mathbf{L}_i - c}{c_t(i) - c}$$

$\mathcal{C} := \{c_t(i) \mid i = 1, 2, \dots, n \text{ y } t \in \text{Std}(\text{Par}_n^{\leq 2})\}$ y

$\text{Std}(\text{Par}_n^{\leq 2}) := \bigcup_{\lambda \in \text{Par}_n^{\leq 2}} \text{Std}(\lambda)$

$$\mathbb{1} = \sum_{t \in \text{Std}(\text{Par}_n^{\leq 2})} \mathbb{E}_t, \quad \mathbf{L}_i \mathbb{E}_t = \mathbb{E}_t \mathbf{L}_i = c_t(i) \mathbb{E}_t, \quad \mathbb{E}_s \mathbb{E}_t = \delta_{st} \mathbb{E}_s$$

Construcción concreta para Temperley-Lieb

Considere

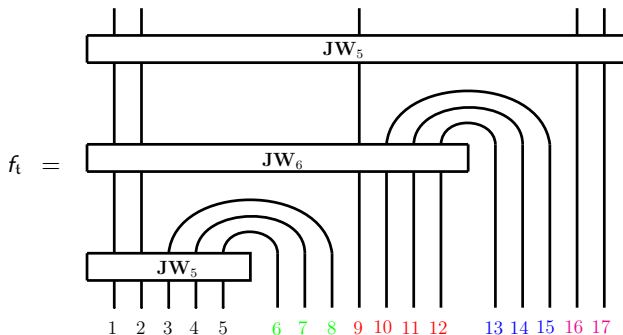
$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 16 & 17 \\ \hline 6 & 7 & 8 & 13 & 14 & 15 \\ \hline \end{array}$$

Construcción concreta para Temperley-Lieb

Considere

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 9 & 10 & 11 & 12 & 16 & 17 \\ \hline 6 & 7 & 8 & 13 & 14 & 15 \\ \hline \end{array}$$

asociamos el elemento f_t



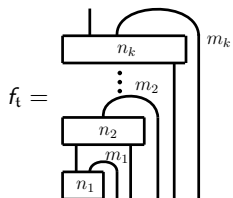
De forma general, escribimos el tableau

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline D_1 & D_2 & \dots & D_k \\ \hline M_1 & M_2 & \dots & M_k \\ \hline \end{array}$$

Sea $d_i := |D_i|$ y $m_i := |M_i|$ los órdenes de D_i y M_i , y para cada $i = 1, 2, \dots, k$ defina n_i vía

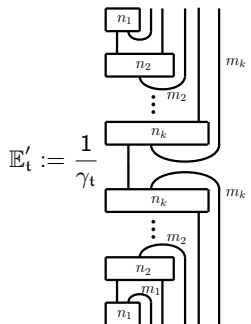
$$n_1 := d_1 \text{ and } n_i = (d_1 + d_2 + \dots + d_i) - (m_1 + m_2 + \dots + m_{i-1}) \text{ para } i > 1$$

Representamos a f_t en la siguiente forma esquemática



Algunos resultados

Definamos f_{tt} como una concatenación de f_t^* con f_t y $\mathbb{E}'_t \in \text{TL}_n^{\mathbb{Q}}$ como $\mathbb{E}'_t := \frac{1}{\gamma_t} f_{tt}$, diagramaticalmente

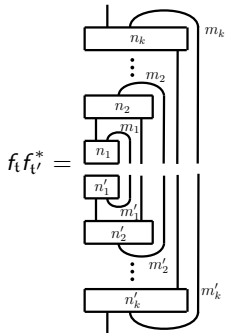


donde

$$\gamma_t := \prod_{j=1}^k (-1)^{m_j} \frac{n_j + 1}{n_j - m_j + 1} \in \mathbb{Q}$$

Teorema

$\{\mathbb{E}'_t \mid t \in \text{Std}(\text{Par}_n^{\leq 2})\}$ es un conjunto completo de idempotentes primitivos ortogonales para $\mathbb{T}\mathbb{L}_n^{\mathbb{Q}}$.



Corolario

Sea λ una partición en dos filas. Entonces $\{f_t | t \in \text{Std}(\lambda)\}$ es una \mathbb{Q} -base para $\Delta(\lambda)$.

Teorema

Suponga que $t \in \text{Std}(\lambda)$ para $\lambda \in \Lambda_2$. Suponga más aún que para una transposición simple $s_i \in \mathfrak{S}_n$ tenemos que $ts_i \triangleleft t$. Entonces, si $t_u := t$, $t_d := ts_i$ y $r := c_{t_u}(i) - c_{t_d}(i)$, se tienen las siguientes fórmulas

- a) $f_{t_u} \mathbb{U}_i = -\frac{r+1}{r} f_{t_u} + \frac{r^2-1}{r^2} f_{t_d}$
- b) $f_{t_d} \mathbb{U}_i = -\frac{r-1}{r} f_{t_d} + f_{t_u}$

Sea $\mathbb{S}_i := \mathbb{U}_i + 1$

Corolario (Forma seminormal de Young para $\text{TL}_n^{\mathbb{Q}}$)

Sea t , s_i , t_u , t_d y r como en el teorema anterior. Entonces tenemos

- a) $f_{t_u} \mathbb{S}_i = -\frac{1}{r} f_{t_u} + \frac{r^2-1}{r^2} f_{t_d}$
- b) $f_{t_d} \mathbb{S}_i = \frac{1}{r} f_{t_d} + f_{t_u}$

Teorema

Sea $t \in \text{Std}(\lambda)$ donde $\lambda \in \text{Par}_n^{\leq 2}$. Entonces para todo $i = 1, 2, \dots, n$ tenemos

$$f_t \mathbf{L}_i = c_t(i) f_t$$

Idea: Inducción en $\text{Std}(\lambda)$ con caso base t^λ : Sea $t \neq t^\lambda$ Asuma válido para todo $s \triangleright t$ y sea $t \cdot s_i = t$.

Sea $f_u = f_{t \cdot s_i}$, $f_d = f_t$ y $c_d(k) = c_t(k)$, $c_u(k) = c_{t \cdot s_i}(k)$. Del teorema tenemos

$$f_u \mathbb{U}_i = -\frac{r+1}{r} f_u + \frac{r^2-1}{r^2} f_d$$

donde $r = c_u(i) - c_d(i)$. Hay 3 casos por estudiar

- $k \neq i, i+1$
- $k = i$
- $k = i+1$

- Caso $k = i$

Usamos la relación

$$(\mathbb{U}_i + 1)\mathbf{L}_i = \mathbf{L}_{i+1}(\mathbb{U}_i + 1) - 1$$

actuando con f_u tenemos

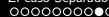
$$f_u(\mathbb{U}_i + 1)\mathbf{L}_i = f_u\mathbf{L}_{i+1}(\mathbb{U}_i + 1) - f_u$$

se obtiene

$$-\frac{c_u(i)}{r}f_u + \frac{r^2 - 1}{r^2}f_d\mathbf{L}_i = -\frac{c_u(i)}{r}f_u + \frac{r^2 - 1}{r^2}c_u(i + 1)f_d$$

Entonces

$$f_d\mathbf{L}_i = c_d(i)f_d$$



Corolario

Para λ una partición en dos partes y $t \in Std(\lambda)$ tenemos que $\mathbb{E}'_t = \mathbb{E}_t$

Sea $R = \mathbb{Z}[q, q^{-1}]$ y para $q \in \mathbb{C}^\times$ define $[2]_q = q + q^{-1}$ y $[m]_q = \frac{q^m - q^{-m}}{q - q^{-1}} = q^{m-1} + q^{m-3} + \dots + q^{-m+1}$ con $q \neq 1$.

Definición

El álgebra de Temperley-Lieb TL_n^R es la R -álgebra asociativa unital con generadores U_1, U_2, \dots, U_{n-1} y relaciones

$$\begin{aligned} U_i^2 &= -[2]_q U_i, & \text{si } i = 1, 2, \dots, n-1 \\ U_i U_j U_i &= U_i, & \text{si } |i-j| = 1 \\ U_i U_j &= U_j U_i, & \text{si } |i-j| > 1. \end{aligned}$$

Todos los resultados siguen siendo válidos sobre \mathbb{K} , el cuerpo de fracciones de R .

El caso No Separado

Estamos interesados en construir idempotentes sobre $\mathbb{TL}_n^{\mathbb{F}_p}$ para $p \leq n$ un número primo. Sea $t \in \text{Std}(\text{Par}_n^{\leq 2})$

p -clase de t

$$[t] = \{s \in \text{Std}(\text{Par}_n^{\leq 2}) \mid c_s(i) \equiv c_t(i) \pmod{p}, \forall i = 1, 2, \dots, n\}$$

para t^λ podemos escribir $[\lambda] = [t^\lambda]$. Sea

$$\mathbb{E}_{[t]} = \sum_{s \in [t]} \mathbb{E}_s$$

$\mathbb{E}_{[t]} \in \mathbb{TL}_n^{\mathbb{Z}_p}$ donde

$$\mathbb{Z}_p := \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \mid p \text{ no divide a } b \right\}$$

$\mathbb{E}_{[t]} \in \mathbb{TL}_n^{\mathbb{F}_p}$ es un idempotente no necesariamente primitivo.

Idempotentes p -Jones-Wenzl

Los elementos ${}^p\mathbf{JW}_n$ fueron introducidos por Burrull, Libedinsky y Sentinelli.

Definición

Para $n \in \mathbb{N}$ definimos los enteros no negativos a_i que satisfacen $0 \leq a_i < p$ y

$$n + 1 = a_k p^k + a_{k-1} p^{k-1} + \dots + a_1 p + a_0$$

Defina $\mathcal{I}_n \subseteq \mathbb{N}$ vía

$$\mathcal{I}_n := \{a_k p^k \pm a_{k-1} p^{k-1} \pm \dots \pm a_1 p \pm a_0\} - 1$$

cada $m \in \mathcal{I}_n$ tiene asociada una única secuencia de signos para los a_k 's (no nulos). Para m asociamos un tableau t_m y se define

$${}^p\mathbf{JW}_n := \sum_{m \in \mathcal{I}_n} \mathbb{E}'_{t_m}$$

Ejemplo 1

- Si $n = 3$ y $p = 3$ tenemos $n + 1 = 4 = 3 + 1$ y entonces $\mathcal{I}_3 = \{3 \pm 1\} - 1$.
Para $m = 3 = 3 + 1 - 1$

$$t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Para $m = 1 = 3 - 1 - 1$

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Ejemplo 1

- Si $n = 3$ y $p = 3$ tenemos $n + 1 = 4 = 3 + 1$ y entonces $\mathcal{I}_3 = \{3 \pm 1\} - 1$.
Para $m = 3 = 3 + 1 - 1$

$$t_3 = \begin{array}{|c|c|c|} \hline 1 & 2 & 3 \\ \hline \end{array}$$

Para $m = 1 = 3 - 1 - 1$

$$t_1 = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 2 \\ \hline 3 & \\ \hline \end{array}$$

Obtenemos

$${}^3\mathbf{JW}_3 := \mathbb{E}'_{t_3} + \mathbb{E}'_{t_1} = \begin{array}{|c|c|c|} \hline \mathbf{JW}_3 \\ \hline \end{array} - \frac{1}{3!2} \begin{array}{|c|c|} \hline \mathbf{JW}_2 \\ \hline \mathbf{JW}_2 \\ \hline \end{array}$$

Podemos expandir ${}^3\mathbf{JW}_3$ para verificar que es un elemento de $\mathbb{T}\mathbb{L}_3^{\mathbb{F}_3}$

$${}^3\mathbf{JW}_3 = \left| \begin{array}{c} | \\ | \\ | \end{array} \right| + \frac{1}{2} \left| \begin{array}{c} \cup \\ \cap \\ | \end{array} \right|$$

Como $[t_3] = \{t_3, t_1\}$, entonces $\mathbb{E}_{[t_3]} = {}^3\mathbf{JW}_3$.

Ejemplo 2

- Si $n = 12$ y $p = 3$ tenemos $n + 1 = 13 = 9 + 3 + 1$ y entonces $\mathcal{I}_{12} = \{9 \pm 3 \pm 1\} - \mathbf{1} = \{12, 10, 6, 4\}$

Para $m = 12 = 9 + 3 + 1 - \mathbf{1}$

$$t_{12} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0^1 & 1^2 & 2^3 & 0^4 & 1^5 & 2^6 & 0^7 & 1^8 & 2^9 & 0^{10} & 1^{11} & 2^{12} \\ \hline \end{array}$$

Para $m = 10 = 9 + 3 - 1 - \mathbf{1}$

$$t_{10} = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0^1 & 1^2 & 2^3 & 0^4 & 1^5 & 2^6 & 0^7 & 1^8 & 2^9 & 0^{10} & 1^{11} \\ \hline 2^{12} \\ \hline \end{array}$$

Para $m = 6 = 9 - 3 + 1 - \mathbf{1}$

$$t_6 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0^1 & 1^2 & 2^3 & 0^4 & 1^5 & 2^6 & 0^7 & 1^8 & 2^{12} \\ \hline 2^9 & 0^{10} & 1^{11} & & & & & & \\ \hline \end{array}$$

Para $m = 4 = 9 - 3 - 1 - \mathbf{1}$

$$t_4 = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0^1 & 1^2 & 2^3 & 0^4 & 1^5 & 2^6 & 0^7 & 1^8 \\ \hline 2^9 & 0^{10} & 1^{11} & 2^{12} & & & & \\ \hline \end{array}$$

Obtenemos ${}^3\mathbf{JW}_{12} = \mathbb{E}'_{t_{12}} + \mathbb{E}'_{t_{10}} + \mathbb{E}'_{t_6} + \mathbb{E}'_{t_4}$. Notar que t_{12} , t_{10} , t_6 y t_4 están en la misma 3-clase.

La clase $[t_{12}]$ contiene dos tableaux adicionales

$$s = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0^1 & 1^2 & 2^3 & 0^4 & 1^5 & 2^9 & 0^{10} & 1^{11} & 2^{12} \\ \hline 2^6 & 0^7 & 1^8 & & & & & & \\ \hline \end{array},$$

$$t = \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|c|c|} \hline 0^1 & 1^2 & 2^3 & 0^4 & 1^5 & 2^9 & 0^{10} & 1^{11} \\ \hline 2^6 & 0^7 & 1^8 & 2^{12} & & & & \\ \hline \end{array}$$

Concluimos

$$\mathbb{E}_{[t_{12}]} = {}^3\mathbf{JW}_{12} + \mathbb{E}'_s + \mathbb{E}'_t$$

$\mathbb{E}'_s + \mathbb{E}'_t \in \mathbb{TL}_{12}^{\mathbb{F}_3}$, $\mathbb{E}'_s + \mathbb{E}'_t \neq 0$ en $\mathbb{TL}_{12}^{\mathbb{F}_3}$ y ${}^3\mathbf{JW}_{12}$ es ortogonal a $\mathbb{E}'_s + \mathbb{E}'_t$.

Entonces $\mathbb{E}_{[t_{12}]}$ no es idempotente primitivo en $\mathbb{TL}_{12}^{\mathbb{F}_3}$.

Referencias

- J. J. Graham, G. I. Lehrer, Cellular algebras, *Inventiones Mathematicae* 123 (1996), 1-34.
- A. Mathas, Seminormal forms and Gram determinants for cellular algebras, *J. Reine Angew. Math.*, 619 (2008), 141-173. With an appendix by M. Soriano.
- D. Plaza, S. Ryom-Hansen, Graded cellular bases for Temperley-Lieb algebras of type A and B, *Journal of Algebraic Combinatorics*, 40(1), 137-177.
- Temperley, H. N., and Lieb, E. H. (1971). Relations between the 'percolation' and 'colouring' problem and other graph-theoretical problems associated with regular planar lattices: some exact results for the 'percolation' problem. *Proceedings of the Royal Society of London. A. Mathematical and Physical Sciences*, 322(1549), 251-280.
- G. Burrull, N. Libedinsky, and P. Santinelli, (2019). p -Jones-Wenzl idempotents. *Advances in Mathematics*.

¡Muchas Gracias!

Ejemplo 1 (método recursivo)

Si $p = 3$ y $n = 3$ tenemos $n + 1 = 4 = a_1 3^1 + a_0 3^0$, con $a_1 = a_0 = 1$. Entonces

$$\mathcal{I}_3 = \{3 \pm 1\} - 1 = \{3, 1\}$$

Entonces, diagramaticalmente esperamos obtener

$${}^3\mathbf{JW}_3 = \begin{array}{c} | \\ | \\ | \\ \text{JW}_3 \\ | \\ | \\ | \end{array} + \lambda_3^1 \begin{array}{c} | \\ \text{p}_3^{1*} \\ | \\ \text{JW}_1 \\ | \\ \text{p}_3^1 \\ | \end{array}$$

El 3-father de n es $f[3] = a_1 3^1 - 1 = 2$ y $f[3] + 1 = 3$
por lo tanto

$$\mathcal{I}_{f[3]} = \mathcal{I}_2 = \{2\}$$

además $s = n - f[3] = 1$.

Ahora, tomando $2 \in \mathcal{I}_2$

$$p_3^1 = p_3^{i-s} = \begin{array}{c} | \\ | \\ \text{JW}_2 \\ | \\ | \end{array} \text{ (with a loop on the top strand)}$$

$$\text{Además } \lambda_3^1 = (-1)^s \frac{i+1-s}{i+1} = -\frac{2}{3},$$

$${}^3\text{JW}_3 = \text{Diagram} - \frac{2}{3} \text{Diagram}$$

Coincide con lo anterior dado que $i = |D_1|$ y $s = |M_1|$.