Álgebra de Hecke afín doble y reglas de Pieri para los polinomios de Macdonald en el superespacio

Manuel Concha Moraga

Universidad de Talca

Funciones simétricas

Las **funciones simétricas** son polinomios en las n variables $x_1, x_2, \ldots, x_n$ con la propiedad de que al intercambiar cualquiera de estas variables, el polinomio no se ve afectado.

Ejemplo

1. $f(x_1, x_2) = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2$,
2. $f(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1^2 + x_2x_3 + x_2^2 + x_1x_3 + x_3^2$,

Particiones

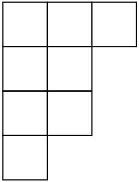
Una partición de n es una secuencia de números naturales decrecientes que suman n, por ejemplo:

$$\text{una partición de 8 es } (3, 2, 2, 1)$$

$$\text{una partición de 11 es } (6, 3, 1, 1)$$

A cada partición se le puede asignar un **diagrama** de la siguiente manera:

$$(3, 2, 2, 1) \quad \longrightarrow$$



Algunas familias de funciones simétricas:

Sea $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n)$ una partición, definimos las siguientes funciones simétricas:

1. Monomiales:

$$m_\lambda = x_1^{\lambda_1} x_2^{\lambda_2} \cdots x_n^{\lambda_n} + \mathit{permutaciones}$$

$$m_{(2,1,1)} = x_1^2 x_2 x_3 + x_1 x_2^2 x_3 + x_1 x_2 x_3^2$$

2. Elementales:

$$e_2 = x_1 x_2 + x_2 x_3 + x_1 x_3$$

3. Potencias:

$$p_4 = x_1^4 + x_2^4 + x_3^4.$$

Polinomios de Macdonald

Para cada λ partición, existe un único polinomio simétrico P_λ que cumple las siguientes propiedades:

1. $P_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} C_{\lambda\mu} m_\mu$,
2. $\langle P_\lambda, P_\mu \rangle_{q,t} = 0$, cuando $\lambda \neq \mu$.

donde el producto escalar está dado por:

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle_{q,t} = z_\lambda \delta_{\lambda\mu} \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}.$$

Ejemplo

1. $$P_{(2,1)}(q,t) = m_{(2,1)} + \frac{(1-t)(2+q+t+2t)}{1-qt^2} m_{(1,1,1)}$$
2. $$P_{(3)}(q,t) = m_{(3)} + \frac{(1-t)(1+q+q^2)}{1-q^2t} m_{(2,1)} + \frac{(1-t)^2(1+q)(1+q+q^2)}{(1-qt)(1-q^2t)} m_{(1,1,1)}.$$

Evaluación y Simetría para los polinomios de Macdonald

Diremos que evaluar en λ es aplicar la siguiente evaluación

$$x_i \longrightarrow q^{\mu_i} t^{N-i}$$

Ejemplo

1. $P_{(3,1,1)}(\emptyset) = \dfrac{t^3(t^3-1)(qt^3-1)}{(t-1)(qt-1)}$,
2. $P_{(3,1,1)}((3,2,1)) = \dfrac{t^3(q^2t^2+qt+1)(q^3t^3-q^2t^2-q^2t+qt^2+qt-1)}{(qt-1)q^{12}}$.

Pero a pesar de esto, dadas dos particiones λ y μ, entonces se cumple la siguiente igualdad para los polinomios de Macdonald

$$\tilde{P}_{\lambda}(\mu) = \tilde{P}_{\mu}(\lambda)$$

Operador

Definimos el operador q-shift como:

$$\tau_i(f)(x_1, x_2, \dots, x_n) = f(x_1, x_2, \dots, qx_i, \dots, x_n)$$

y sea

$$A_{ij} = \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j}$$

Se puede definir el operador de Macdonald de la siguiente manera:

Ejemplo

1. $D_2^1 = A_{12}\tau_1 + A_{21}\tau_2$
2. $D_3^1 = A_{12}A_{13}\tau_1 + A_{21}A_{23}\tau_2 + A_{31}A_{32}\tau_3$
3. $D_3^2 = A_{13}A_{23}\tau_{12} + A_{21}A_{31}\tau_{23} + A_{12}A_{32}\tau_{13}$

Y este cumple con

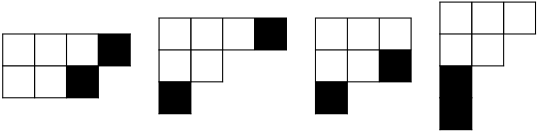
$$D_n^r P_\lambda = e_r(\lambda) P_\lambda$$

Reglas de Pieri para polinomios de Macdonald

Tenemos las siguiente formula:

$$e_r P_\lambda = \sum_\mu \psi_{\lambda\mu} P_\mu$$

Por ejemplo:

$e_2 \cdot P_{(3,2)} =$ 

Asi, realizando los calculos pertinentes se tiene que:

$$\begin{aligned} e_2 \cdot P_{(3,2)} = P_{(4,3)} &+ \frac{1-q^2}{1-q^2 t} \cdot \frac{1-qt^2}{1-qt} P_{(4,2,1)} \\ &+ \frac{1-q^3 t}{1-q^3 t^2} \cdot \frac{1-q^3 t^3}{1-q^2 t^2} \cdot \frac{1-q}{1-qt} \cdot \frac{1-t^2}{1-t} P_{(3,3,1)} \\ &+ \frac{1-q^3 t}{1-q^3 t^3} \cdot \frac{1-q^2 t^4}{1-q^2 t^2} \cdot \frac{1-q^2}{1-q^2 t^2} \cdot \frac{1-qt^3}{1-qt} P_{(3,2,1,1)}. \end{aligned}$$

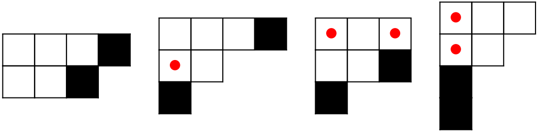
Reglas de Pieri para polinomios de Macdonald

Tenemos las siguiente formula:

$$e_r P_\lambda = \sum_\mu \psi_{\lambda\mu} P_\mu$$

Por ejemplo:

$$e_2 \cdot P_{(3,2)} =$$



Asi, realizando los calculos pertinentes se tiene que:

$$\begin{aligned} e_2 \cdot P_{(3,2)} = P_{(4,3)} &+ \frac{1-q^2}{1-q^2t} \cdot \frac{1-qt^2}{1-qt} P_{(4,2,1)} \\ &+ \frac{1-q^3t}{1-q^3t^2} \cdot \frac{1-q^3t^3}{1-q^2t^2} \cdot \frac{1-q}{1-qt} \cdot \frac{1-t^2}{1-t} P_{(3,3,1)} \\ &+ \frac{1-q^3t}{1-q^3t^3} \cdot \frac{1-q^2t^4}{1-q^2t^2} \cdot \frac{1-q^2}{1-q^2t^2} \cdot \frac{1-qt^3}{1-qt} P_{(3,2,1,1)}. \end{aligned}$$

Polinomios simétricos en el superespacio

Consideremos el espacio:

$$\mathbb{Q}[x;\theta] = \mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots, x_N, \theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N]$$

en la cual se cumplen las siguientes relaciones:

$$x_i x_j = x_j x_i, \quad \theta_i x_j = x_j \theta_i, \quad \theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i.$$

Sea $\sigma \in S_N$, un **polinomio simetrico en el super espacio** es un polinomio $f \in \mathbb{Q}[x, \theta]$ tal que

$$K_\sigma^x K_\sigma^\theta f = f$$

Ejemplo

1. $f(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = \theta_1 x_2^2 + \theta_2 x_1^2$,
2. $f(x_1, x_2, \theta_1, \theta_2) = \theta_1 \theta_2 (x_1^4 - x_2^4)$,

Super Particiones

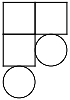
Una **super partición** Λ es un par de particiones $(\Lambda^a; \Lambda^s)$, donde Λ^a es una partición es estrictamente decreciente y Λ^s es una partición usual, por ejemplo:

$$\Lambda = (1, 0; 2)$$

Definimos a Λ^* a la partición obtenida al ordenar la superpartición Λ, como por ejemplo

$$\Lambda^* = (2, 1, 0)$$

A cada super partición se le puede asignar un diagrama de la siguiente manera

$\Lambda =$ 

Algunas familias de polinomios simétricos en el superespacio

Sea $\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s)$ una super partición, definimos las siguientes funciones super simétricas:

1. Monomiales:

$$m_\Lambda = \theta_1 \cdots \theta_m x_1^{\Lambda_1} x_2^{\Lambda_2} \cdots x_n^{\Lambda_n} + \textit{permutaciones}$$

$$m_{(2;1,1)} = \theta_1 x_1^2 x_2 x_3 + \theta_2\, x_2^2 x_1 x_3 + \theta_3 x_3^2 x_1 x_2$$

2. Elementales: e_r y $\widetilde{e}_r$ donde

$$\widetilde{e}_2 = \theta_1 x_2 x_3 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_3 x_1 x_2$$

3. Potencias: p_r y $\widetilde{p}_r$ donde

$$\tilde{p}_4 = \theta_1 x_1^4 + \theta_2 x_2^4 + \theta_3 x_3^4$$

Polinomios de Macdonald en el superespacio

Para cada superpartición Λ , existe un único polinomio $P_\Lambda = P_\Lambda(x, \theta; q, t)$ tal que:

1. $P_\Lambda = m_\Lambda + \sum_{\Omega < \Lambda} C_{\Lambda/\Omega} m_\Omega,$
2. $\langle\langle P_\Lambda, P_\Omega \rangle\rangle_{q,t} = 0,$ cuando $\Lambda \neq \Omega.$

donde el producto interno está definido por:

$$\langle\langle p_\Lambda, p_\Omega \rangle\rangle_{q,t} = z_\Lambda(q, t)\delta_{\Lambda\Omega}$$

Ejemplo

$$\begin{aligned} P_{(2;2,1)} = \quad & \theta_1(x_1^2 x_2 x_3(x_2 + x_3) + \frac{q(t^2-1)}{qt^2-1} x_2 x_3) \\ & + \theta_2(x_2^2 x_1 x_3(x_1 + x_3) + \frac{q(t^2-1)}{qt^2-1} x_1 x_3) \\ & + \theta_3(x_3^2 x_2 x_1(x_2 + x_1) + \frac{q(t^2-1)}{qt^2-1} x_2 x_1) \end{aligned}$$

Que sabíamos?

Clásico		**Super espacio**
Evaluación	$\longrightarrow$	Demostrado
Simetría	$\longrightarrow$	Conjetura
Regla de Pieri	$\longrightarrow$	Conjetura
Operador	$\longrightarrow$	Conjetura

Álgebra de Hecke

Definimos el operador de Hecke como:

$$T_i = t + \frac{tx_i - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}(s_i - 1).$$

Estos operadores cumplen las siguientes relaciones:

$$(T_i - t)(T_i + 1) = 0,$$

$$T_i T_{i+1} T_i = T_{i+1} T_i T_{i+1}$$

$$T_i T_j = T_j T_i \text{ siempre y cuando } i - j \neq \pm 1 \text{ modulo } N$$

Otro operador importante es el operador ω:

$$\omega := s_{n-1} s_{n-2} \cdots s_2 s_1 \tau_1$$

Polinomios de Macdonald No simétricos

Definimos el operador de Cherednik como:

$$Y_i = t^{i-n} T_i \cdots T_{n-1} \omega T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1}$$

Los operadores de Cherednik conmutan entre ellos y pueden ser simultaneamente diagonalizados, sus funciones propias son los polinomios de Macdonald no simétricos y estan indexados por composiciones:

$$Y_i E_\eta = \bar{\eta}_i E_\eta.$$

Super simetrización

Operador de t-Simetrización

$$U_N^+ = \sum_{\sigma \in S_N} T_\sigma .$$

Operador de t-Antisimetrización

$$U_N^- = \sum_{\sigma \in S_N} (-t)^{-\ell(\sigma)} T_\sigma$$

Entonces el polinomio de Macdonald en el super espacio se obtiene permutando:

$$P_\Lambda = \theta_1 \cdots \theta_m U^- U^+ E_\eta(x_1, x_2, x_3, x_4, x_5)$$

donde Λ es la super partición obtenida al permutar η.

Que sabemos

Clásico		**Super espacio**
Evaluación	$\longrightarrow$	Demostrado
Simetría	$\longrightarrow$	Conjetura
Regla de Pieri	$\longrightarrow$	Conjetura
Operador	$\longrightarrow$	Conjetura

Super Evaluación

Si Λ es una superpartición y w es la permutación tal que $w\Lambda = \Lambda^*$ entonces definimos la siguiente super evaluación:

$$x_{w^{-1}(i)} \longrightarrow q^{-\Lambda_i^*} t^{i-1}$$

Ejemplo

$$\Lambda = (1, 0; 2) \longrightarrow \Lambda^* = (2, 1, 0)$$

en este caso $w = K_{12}K_{23}$, entonces la evaluación es

$$x_1 = x_{w^{-1}(2)} = q^{-\Lambda_2^*} t^{2-1} = q^{-1} t^{1}$$

$$x_2 = x_{w^{-1}(3)} = q^{-\Lambda_3^*} t^{3-1} = q^{-0} t^{2}$$

$$x_3 = x_{w^{-1}(1)} = q^{-\Lambda_1^*} t^{1-1} = q^{-2} t^{0}$$

Propiedad de Simetría

Dada una función bisimétrica f, se tiene que

$$f(Y^{-1}) \cdot P_\Lambda = f(\Lambda) \cdot P_\Lambda$$

Además, si $\rho = (m-1, \ldots, 1, 0; \quad)$ definimos el corchete:

$$[f,g]_m = (f(Y^{-1}) \cdot g(x)\Delta_m^t)(\rho_m)$$

se tiene que es simétrico:

$$[f,g]_m = [g,f]_m$$

y con esto se puede demostrar la simétria en el caso supersimetrico

$$\tilde{P}_{\Lambda}(\Omega) = \tilde{P}_{\Omega}(\Lambda)$$

Sabemos

Clásico		**Super espacio**
Evaluación	$\longrightarrow$	Demostrado
Simetría	$\longrightarrow$	Demostrado
Regla de Pieri	$\longrightarrow$	Conjetura
Operador	$\longrightarrow$	Conjetura

Que sabemos?

Clásico	**Super espacio**
Evaluación	Demostrado
Simetría	Demostrado
Regla de Pieri	Conjetura
Operador	Conjetura

Reglas de Pieri (Conjetura)

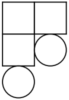
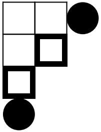
Tenemos las siguiente formula:

$$e_r P_\Lambda = \sum_{\Omega} \psi_{\Lambda\Omega} P_\Omega$$

Lo que ilustraremos con un ejemplo:

$$\begin{aligned} e_2 P_{(1,0;2)} =& P_{(2,0;3)} + *P_{(1,0;3,1)} + *P_{(2,1;2)} + *P_{(2,0;2,1)} \\ &+ *P_{(1,0;2,2)} + *P_{(2,1;1,1)} + *P_{(1,0;2,1,1)} \end{aligned}$$

El coeficiente $(2, 0; 2, 1)$ está dado por

$(1, 0; 2) =$  $\longrightarrow (2, 0; 2, 1) =$ 

y el coeficiente es de la forma

$$\frac{t(-1+q)^2(q^2t^3 + 2qt^2 - 2qt - 1)}{t(q^2t^2-1)(qt-1)(qt^2-1)} = \frac{t(-1+q)^2 \det(Z)}{(q^2t^2-1)(qt-1)(qt^2-1)}$$

Reglas de Pieri (Conjetura)

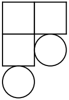
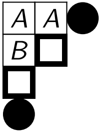
Tenemos las siguiente formula:

$$e_r P_\Lambda = \sum_\Omega \psi_{\Lambda\Omega} P_\Omega$$

Lo que ilustraremos con un ejemplo:

$$\begin{aligned} e_2 P_{(1,0;2)} =& P_{(2,0;3)} + *P_{(1,0;3,1)} + *P_{(2,1;2)} + *P_{(2,0;2,1)} \\ &+ *P_{(1,0;2,2)} + *P_{(2,1;1,1)} + *P_{(1,0;2,1,1)} \end{aligned}$$

El coeficiente $(2,0;2,1)$ está dado por

$(1,0;2) =$  $\longrightarrow (2,0;2,1) =$ 

y el coeficiente es de la forma

$$\frac{t(-1+q)^2 {\color{red}(q^2t^3 + 2qt^2 - 2qt - 1)}}{t(q^2t^2-1)(qt-1)(qt^2-1)} = \frac{t(-1+q)^2 {\color{red}\det(Z)}}{(q^2t^2-1)(qt-1)(qt^2-1)}$$

Plan de demostración

Si tuvieramos

$$e_r(Y_1,\ldots,Y_N)f(x)=\sum_{\substack{\sigma\in S_m\\|I|=r}} g_{I,\sigma}(x;q,t)\tau_I\sigma f(x)$$

entonces tendríamos la siguiente situación

$$\begin{aligned}e_r(Y_1,\ldots,Y_N)P_\Gamma(\Lambda) &= \sum g_{I,\sigma}\tau_I\sigma P_\Gamma(\Lambda)\\ &= \sum g_{I,\sigma}P_\Gamma(\Omega)\\ &= \sum g_{I,\sigma}P_\Omega(\Gamma)\end{aligned}$$

Por otro lado

$$\begin{aligned}e_r(Y_1,\ldots,Y_N)P_\Gamma(\Lambda) &= e_r(\Gamma)P_\Gamma(\Lambda)\\ &= e_r(\Gamma)P_\Lambda(\Gamma)\end{aligned}$$

igualando y como se tiene la igualdad para infinitos puntos, tenemos que la regla de Pieri deseada

$$e_r(x)P_\Lambda(x)=\sum g_{I,\sigma}P_\Omega(x)$$

Sabemos

Clásico		**Super espacio**
Evaluación	$\longrightarrow$	Demostrado
Simetría	$\longrightarrow$	Demostrado
Regla de Pieri	$\longrightarrow$	Conjetura
Operador	$\longrightarrow$	Conjetura

Operador de Macdonald en el superespacio (Conjetura)

Por simplicidad definiremos lo siguiente:

$$\tilde{B}_{ij} = \frac{x_i x_j (1-q)(1-t)}{(qx_i - x_j)(x_i - x_j)} \theta_j (\partial_{\theta_i} - \partial_{\theta_j})$$

Ejemplo

1. $D_2^1 = (A_{12} + \tilde{B}_{12})\tau_1 + (A_{21} + \tilde{B}_{21})\tau_1$

2. $$\begin{aligned} D_3^1 = \; & (A_{12}A_{13} + \tilde{B}_{12}A_{13} + A_{12}\tilde{B}_{13} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{13})\tau_1 \\ & +(A_{21}A_{23} + \tilde{B}_{21}A_{23} + A_{21}\tilde{B}_{23} + \tilde{B}_{21}\tilde{B}_{23})\tau_2 \\ & +(A_{31}A_{32} + \tilde{B}_{31}A_{32} + A_{31}\tilde{B}_{32} + \tilde{B}_{31}\tilde{B}_{32})\tau_3 \end{aligned}$$

3. $$\begin{aligned} D_3^2 = \; & (A_{13}A_{23} + \tilde{B}_{13}A_{21} + A_{12}\tilde{B}_{23})\tau_{12} \\ & +(A_{21}A_{31} + \tilde{B}_{21}A_{32} + A_{32}\tilde{B}_{31})\tau_{23} \\ & +(A_{12}A_{32} + \tilde{B}_{12}A_{31} + A_{13}\tilde{B}_{32})\tau_{13} \end{aligned}$$

La idea es demostrar que

$$e(Y)f \longrightarrow D_N^r f$$

Ejemplo

Caso N=4. m=2, r=2

$$A_{13}A_{14}A_{23}A_{24}\tau_{1,2}f_{1,2}$$

$$A_{34}A_{14}\tau_1(A_{12})\tau_3(A_{32})\tau_{1,3}f_{1,2} + A_{13}A_{14}B_{32}A_{34}\tau_{1,3}f_{1,3}$$

$$A_{13}A_{43}\tau_1(A_{12})\tau_4(A_{42})\tau_{1,4}f_{1,2} + A_{13}A_{14}B_{42}A_{43}\tau_{1,4}f_{1,4}$$

$$A_{34}A_{24}\tau_2(A_{21})\tau_3(A_{31})\tau_{2,3}f_{1,2} - A_{23}A_{24}B_{31}A_{34}\tau_{2,3}f_{2,3}$$

$$A_{23}A_{43}\tau_2(A_{21})\tau_4(A_{41})\tau_{2,4}f_{1,2} - A_{23}A_{24}B_{41}A_{43}\tau_{24}f_{2,4}$$

$$\tau_3(A_{32}A_{31})\tau_4(A_{42}A_{41})\tau_{3,4}f_{1,2} + B_{32}A_{43}\tau_3(A_{31})\tau_4(A_{41})\tau_{3,4}f_{1,3}$$

$$+B_{42}A_{34}\tau_3(A_{31})\tau_4(A_{41})\tau_{3,4}f_{1,4} - B_{31}A_{43}\tau_3(A_{32})\tau_4(A_{42})\tau_{3,4}f_{2,3}$$

$$-B_{41}A_{34}\tau_3(A_{32})\tau_4(A_{42})\tau_{3,4}f_{2,4} + A_{34}A_{43}(B_{31}B_{42} - B_{32}B_{41})\tau_{34}f_{3,4}$$

Nuevas reglas de Pieri

Es posible encontrar

$$e_r(Y_1^{-1}, \ldots, Y_m^{-1})f(x) = \sum g_{I,\sigma}\tau_I^{-1}\sigma f(x)$$

explicitamente y también

$$e_r(Y_{m+1}, \ldots, Y_N)f(x) = \sum h_{I,\sigma}\tau_I \sigma f(x)$$

Con estos operadores más la simétria podemos obtener reglas de Pieri.
Por otro lado tenemos la descomposición

$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = e_2(x_1, x_2) + e_1(x_1, x_2)e_1(x_3, x_4) + e_2(x_3, x_4)$$

con todo esto se intentará demostrar la regla de Pieri de la conjetura.

Pasos siguientes

1. Encontrar las dos reglas de Pieri mencionadas,
2. Combinar estas reglas de Pieri para obtener la conjetura,
3. Ocupar los bloques para reconstruir el Operador de Macdonald en el super espacio.
4. Generalizar los sistemas de q-bosones a sistemas q-bosones y q-fermiones.