Campos vectoriales localmente finitos sobre variedades algebraicas afines

Luis Cid

Universidad de Talca

Talca, 8 de Mayo de 2019

Generalidades de geometría algebraica

Conjunto algebraico afín

Sea S un subconjunto arbitrario de $\mathbb{C}^{[n]} = \mathbb{C}[x_1, x_2, ..., x_n]$.

$$V(S) = \{x \in \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) |\ \forall P \in S, P(x) = 0\}$$

Es decir, $V(S)$ es el conjunto de todos los ceros comunes de los polinomios P en S. $V(S)$ lo llamaremos el conjunto algebraico afín.

Ideal de un conjunto algebraico

Sea V un subconjunto de $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$, el conjunto

$$I(V) = \{f \in \mathbb{C}^{[n]} | \forall x \in V, f(x) = 0\}$$

Topología de Zariski

Definimos la topología de Zariski sobre $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ como la topología cuyos conjuntos cerrados son los conjuntos algebraicos afines.

Abierto estándar

Consideremos $P \in \mathbb{C}^{[n]}$ y sea $V(P)$. Llamaremos al conjunto $D(P) = \mathbb{A}^n(\mathbb{C}) \setminus V(P)$ abierto estándar.

Base de la topología de Zariski

La familia de abiertos estándar de $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ es una base para la topología de Zariski.

Irreducibilidad

Definición

Sea X un espacio topológico, no vacío, dotado de la topología inducida por la topología de Zariski, diremos que X es irreducible si $X = F \cup G$, donde F y G son conjuntos cerrados en X, entonces $X = F$ o $X = G$.

Definición

Una variedad algebraica afín V es un conjunto algebraico afín irreducible.

Teorema

Sea V un conjunto algebraico afín en $\mathbb{A}^n(\mathbb{C})$ equipado con la topología de Zariski. Entonces,

$$V \text{ es irreducible} \Leftrightarrow I(V) \text{ primo} \Leftrightarrow \Gamma(V) = \frac{\mathbb{C}^{[n]}}{I(V)} \text{ integral.}$$

Morfismos

Función regular

Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ un conjunto algebraico. Una aplicación $f : X \to \mathbb{C}$ se llama regular si es la restricción a X de una función $\overline{f} : \mathbb{A}^n \to \mathbb{C}$ dada por un polinomio $\overline{f} \in \mathbb{C}^{[n]}$.

Morfismo

Sea $X \subset \mathbb{A}^n$ y $Y \subset \mathbb{A}^m$ variedades algebraicas afines. Un morfismo entre X e Y es una aplicación $\phi : X \to Y$ tal que existen m funciones regulares $f_1, f_2, .., f_m : Y \to \mathbb{C}$ con $\phi(x) = (f_1(x), ..., f_m(x))$ para todo $x \in X$.

Grupo algebraico

Definición

Un grupo algebraico G es una variedad algebraica equipada con una estructura de grupo tal que las siguientes aplicaciones:

$$\begin{array}{rcl} \mu : G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \longmapsto & gh \end{array}$$

$$\begin{array}{rcl} \iota : G & \longrightarrow & G \\ g & \longmapsto & g^{-1} \end{array}$$

son morfismos de variedades.

Ejemplo

1. $\mathbb{G}_a = (\mathbb{C}, +)$ y $\mathbb{G}_m = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ son grupos algebraicos unidimensionales.
2. $(\mathrm{GL}_n(\mathbb{C}), \circ)$ es un grupo algebraico lineal de dimensión n^2.

Acción de grupos algebraicos

Definición

Denotamos por $\mathrm{e}_G : \{e\} \to G$ el elemento neutro de G y $\mathrm{m}_G : G \times G \to G$ el morfismo operación de grupos. Una acción de un grupo G sobre una variedad algebraica afín X es una aplicación $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ tal que los siguientes diagramas conmutan.

$$
\begin{tikzcd}
G \times G \times X \arrow[r, "(m_G,\mathrm{Id}_X)"] \arrow[d, "(\mathrm{Id}_G,\alpha)"'] \arrow[dr, phantom, "\circlearrowleft"] & G \times X \arrow[d, "\alpha"] \\
G \times X \arrow[r, "\alpha"] & X
\end{tikzcd}
\qquad
\begin{tikzcd}
\{e\} \times X \arrow[r, "(e_G,\mathrm{Id}_X)"] \arrow[dr, "\mathrm{Id}_X"] & G \times X \arrow[d, "\alpha"] \\
 & X
\end{tikzcd}
$$

Criterio para la existencia de una G-acción

Sea X una variedad algebraica afín y $\mathcal{O}(X)$ el anillo de funciones regulares, $\mathcal{O}(G)$ el anillo de funciones regulares asociado a G. Una G-acción $\alpha : G \times X \longrightarrow X$ es equivalente a determinar un homomorfismo co-acción
$\alpha^* : \mathcal{O}(X) \longrightarrow \mathcal{O}(G \times X) = \mathcal{O}(G) \otimes_{\mathbb{C}} \mathcal{O}(X)$ tal que satisfaga

$$\begin{array}{rcl} \text{Geometría} & \leftrightarrow & \text{Álgebra} \\ \alpha \circ (m_G, \mathrm{Id}_X) = \alpha \circ (\mathrm{Id}_G, \alpha) & \leftrightarrow & (t \mapsto t \cdot t') \circ \alpha^* = \widetilde{\alpha} \circ \alpha^* \\ \alpha \circ (e_G, \mathrm{Id}_X) = \mathrm{Id}_X & \leftrightarrow & \mathrm{ev}_{e_G} \circ \alpha^* = \mathrm{Id}_{\mathcal{O}(X)} \end{array}$$

con ev_{e_G} evaluación en el elemento neutro y
$\widetilde{\alpha} : \mathcal{O}(G \times X) \longrightarrow \mathcal{O}(G \times G \times X)$ se define como
$\widetilde{\alpha}(a(t \cdot x)) = t' \cdot a(t \cdot x)$

Ejemplo

$\mathbb{G}_a = (\mathbb{C}, +)$ tiene como anillo de funciones regulares $\mathcal{O}(\mathbb{G}_a) = \mathbb{C}[t]$ y el grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m = (\mathbb{C}^*, \cdot)$ al anillo de polinomios de Laurent $\mathcal{O}(\mathbb{G}_m) = \mathbb{C}[t, t^{-1}]$.

Derivaciones

Derivación

Sea A un $\mathbb{C}$-dominio. Una $\mathbb{C}$-derivación de A, es cualquier aplicación $D : A \longrightarrow A$ que satisface las siguientes condiciones para todo $a, b \in A$:

1. $D(a+b) = D(a) + D(b)$
2. $D(ab) = aD(b) + bD(a)$ (Regla de Leibniz o regla del producto)

Derivación localmente finita (LFDer)

Una derivación es localmente finita, si el span de las imágenes $\{D^n(a)|n \geq 0\}$ es finito dimensional para todo $a \in A$, es decir A como espacio vectorial, es una suma de subespacios finitos dimensionales D-invariantes.

Derivación semisimple

Una derivación D sobre un álgebra A es semsimple, si $D(a_i) \in \mathbb{C}a_i$ $i \in I$, para alguna base lineal $\{a_i, i \in I\}$ de A.

Derivación localmente nilpotente LND(A)

Una derivación $D \in \mathrm{Der}(A)$ se dice que es localmente nilpotente si y sólo si para cada $a \in A$, existe $n \in \mathbb{Z}_{n \geq 0}$ de tal manera que $D^n(a) = 0$.

Observación: las derivaciones semimisimples y localmente nilpotentes son derivaciones localmente finitas.

Ejemplos

Sobre $A = \mathbb{C}[x]$

1. $D = \frac{d}{dx}$ es una derivación localmente nilpotente, pues para todo $p(x) \in \mathbb{C}[x]$, de grado n se cumple $D^{n+1}(p(x)) = 0$.
2. $D = x\frac{d}{dx}$ es una derivación semisimple, pues existe una base de autovectores $\{1, x, x^2, x^3, ...\}$, donde cada elemento genera un subespacio D-invariante.

Descomposición de Jordan

Sea A un $\mathbb{C}$-dominio y $D : A \longrightarrow A$ una $\mathbb{C}$- derivación localmente finita . Toda derivación D localmente finita admite una descomposición $D = D_s + D_n$, donde D_s es semisimple y D_n es localmente nilpotente, tal que $[D_s, D_n] = 0$

Exponencial de una derivación localmente nilpotente

Sea A un $\mathbb{C}$-dominio y $D : A \longrightarrow A$ una derivación localmente nilpotente $\mathrm{LND}(A)$. Definimos la exponencial de D como la aplicación $\exp(D) : A \longrightarrow A$, dada por

$$\exp D(a) = \sum_{i \geq 0} \frac{D^{(i)}(a)}{i!}$$

Esta bien definida pues existe n tal que $D^{(n)}(a) = 0$

Proposición

Si $D, D_1, D_2 \in \mathrm{LND}(A)$, se tiene que

1. $\exp D$ es un automorfismo de A
2. Si $[D_1, D_2] = 0$, entonces $\exp(D_1 + D_2) = \exp D_1 \circ \exp D_2 = \exp D_2 \circ \exp D_1$
3. Si $\varphi \in \mathrm{Aut}(A)$, entonces $\varphi \exp(D) \varphi^{-1} = \exp(\varphi D \varphi^{-1})$

$\mathbb{G}_m$-acciones

Teorema

Las acciones algebraicas del grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$ sobre $X = \mathrm{Spec}(A)$ están en correspondencia con las $\mathbb{Z}$- graduaciones de la forma

$$A = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$$

con $A_n = \{a \in A | a(t \cdot x) = t^n a(x), \forall t \in \mathbb{G}_m\}$

$\mathbb{G}_m$-acciones

Ejemplo

La acción algebraica del grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$ sobre $\mathbb{A}^1 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x])$ de la forma

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^1 & \longrightarrow & \mathbb{A}^1 \\ (t, x) & \mapsto & t^a x \end{array}$$

con $a \in \mathbb{Z}$, corresponde a la $\mathbb{Z}$-graduación $\mathbb{C}[x] = \bigoplus_{n \in \mathbb{Z}} A_n$

$$A_n = \begin{cases} \mathbb{C}x^m & ;\text{si } n = m \cdot a \\ 0 & ;\text{en otro caso} \end{cases}$$

Aplicación Exponencial

Sea $D \in \mathrm{Der}(A)$, definimos la aplicación exponencial $\exp(zD)$, de la siguiente manera

$$\begin{aligned} \exp(zD) : A &\longrightarrow A[|z|] \\ a &\mapsto \sum_{i\geq 0} \frac{z^i}{i!} D^{(i)}(a) \end{aligned}$$

$\mathbb{G}_m$-acciones

Teorema (L. Cid)

Existe una correspondencia biyectiva entre las acciones regulares del grupo multiplicativo y las derivaciones semisimples cuyos autovalores son números enteros:

$$\begin{array}{ccc} D_s & \longrightarrow & (\exp(zD_s))^* \\ \mathrm{ev}_1 \circ \dfrac{d}{dt} \circ \varphi^* & \longleftarrow & \varphi \end{array}$$

donde t y z se relacionan de la siguiente manera

$$\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\exp(zD_s)} \mathcal{O}(X)[|z|] \xrightarrow{z \mapsto \sum_{i \geq 1} (-1)^{i+1} \frac{(t-1)^i}{i}} \mathcal{O}(X)[|t-1|]$$

permitiendo que $\exp(zD_s)$ se factorice en

$$\mathcal{O}(X)[|t-1|] \cap \mathcal{O}(X)[t^{\pm 1}]$$

Observación

En particular si $t = e$

$$\mathcal{O}(X) \xrightarrow{\exp(zD_s)} \mathcal{O}(X)[t^{\pm 1}] \xrightarrow{\mathrm{ev}_e} \mathcal{O}(X)$$

obtenemos un automorfismo semisimple $\exp(D_s)$

$\mathbb{G}_m$-acciones

Ejemplo

La acción algebraica del grupo multiplicativo $\mathbb{G}_m$ sobre $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x,y])$

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{G}_m \times \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (t,(x,y)) & \mapsto & (t^a x, t^b y) \end{array}$$

con $a, b \in \mathbb{Z}$, corresponden a la derivaciones de la forma $\mathrm{ev}_1 \circ \frac{d}{dt} \circ \varphi^* = ax\frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}$ con $a, b \in \mathbb{Z}$.

$\mathbb{G}_a$-acciones

Teorema

Existe una correspondencia biyectiva entre las acciones regulares del grupo aditivo y las derivaciones localmente nilpotentes:

$$\begin{array}{rcl} D_n & \longrightarrow & (\exp(tD_n))^* \\ \mathrm{ev}_0 \circ \dfrac{d}{dt} \circ \varphi^* & \longleftarrow & \varphi \end{array}$$

donde ev_0 es la aplicación evaluar $t = 0$.

$\mathbb{G}_a$-acciones

Ejemplo

Cualquier acción algebraica del grupo aditivo $\mathbb{G}_a$ sobre $\mathbb{A}^2 = \mathrm{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ es conjugada a la siguiente acción dada por

$$\begin{array}{rcl} \varphi : \mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (t, (x, y)) & \mapsto & (x, y + f(x)t) \end{array}$$

que a su vez corresponde a la derivación de la forma $\mathrm{ev}_0 \circ \frac{d}{dt} \circ \varphi^* = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$, con $f(x) \in \mathbb{C}[x]$.

$\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$-acciones y derivaciones localmente finitas

Teorema (L. Cid)

Existe una correspondencia biyectiva entre las acciones regulares del grupo $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$ sobre $\mathbb{A}^n$ y las derivaciones localmente finitas definidas sobre $\mathbb{C}^{[n]}$ cuyos autovalores son números enteros.

$$\begin{array}{rcl} \{\mathrm{LFDer}(\mathbb{C}^{[n]})\} & \longleftrightarrow & \{\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a\text{-acciones sobre } \mathbb{C}^n\} \\ D = D_s + D_n & \longrightarrow & (\exp(zD_s + t_2 D_n))^* \\ \mathrm{ev}_{(1,0)} \circ \left(\dfrac{\partial}{\partial t_1} + \dfrac{\partial}{\partial t_2}\right) \circ \varphi^* & \longleftarrow & \varphi = \varphi_s \varphi_n = \varphi_n \varphi_s \end{array}$$

donde $z = \sum_{i=1}^{\infty} (-1)^{i+1} \dfrac{(t_1 - 1)^i}{i}$, $t_1 \in \mathbb{C}^*$.

Observación

Si la acción se restringe a $\{1\} \times \mathbb{G}_a$ su derivación es nilpotente, y si la restringimos a $\mathbb{G}_m \times \{0\}$ si derivación es semisimple con autovalores enteros.

$\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$-acciones

Ejemplo

Las acciones algebraicas del grupo $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$ sobre $\mathbb{A}^2 = \operatorname{Spec}(\mathbb{C}[x, y])$ de la forma

$$\begin{aligned} \varphi : \mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a \times \mathbb{A}^2 &\longrightarrow \mathbb{A}^2 \\ ((t_1, t_2), (x, y)) &\mapsto ({t_1}^a x, y + f(x) t_2) \end{aligned}$$

con $a \in \mathbb{Z}$, $f(x) \in \mathbb{C}[x]$, corresponden a la derivaciones de la forma

$$\mathrm{ev}_{(1,0)} \circ \left(\frac{d}{dt_1} + \frac{d}{dt_2} \right) \circ \varphi^* = ax \frac{\partial}{\partial x} + f(x) \frac{\partial}{\partial y}$$

Proposición (Van den Essen, 1992)

Sea D una k-derivación de $k[x, y]$, k cuerpo algebraicamente cerrado de característica cero . Entonces salvo conjugación por automorfismos de $k[x, y]$, D tiene una de las siguientes formas:

1. $D = (ax + by)\frac{\partial}{\partial x} + (cx + dy)\frac{\partial}{\partial y}$ para algún $a, b, c, d \in k$.
2. $D = \frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}$ para algún $b \in k$.
3. $D = ax\frac{\partial}{\partial x} + (x^m + amy)\frac{\partial}{\partial y}$ para algún $a \in k$ y $m \geq 1$
4. $D = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$ para algún $f(x) \in k[x]$.

$\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$-acciones y derivaciones localmente finitas

Proposición (L. Cid)

Dada una $\mathbb{C}$-derivación D sobre $\mathbb{C}[x, y]$ con autovalores enteros, toda acción de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$ sobre $\mathbb{A}^2$ es de la siguiente forma:

1 Para la derivación $D = (ax + by)\dfrac{\partial}{\partial x} + (cx + dy)\dfrac{\partial}{\partial y}$ con $a, b, c, d \in \mathbb{C}$, módulo conjugación por un automorfismos lineal,obtenemos la acción

a) $(x, y) \mapsto ({t_1}^{\lambda_1} x, {t_1}^{\lambda_2} y)$
b) $(x, y) \mapsto ({t_1}^{\lambda} x, {t_1}^{\lambda}(y + t_2 x))$

2. Para $D = \frac{\partial}{\partial x} + by\frac{\partial}{\partial y}$ para algún $b \in \mathbb{Z}$, su acción es $(x, y) \mapsto (x + t_2, t_1^b y)$
3. Para la derivación $D = ax\frac{\partial}{\partial x} + (x^m + amy)\frac{\partial}{\partial y}$ con $a, m \in \mathbb{Z}$ y $m \geq 1$ su acción es $(x, y) \mapsto (t_1^a x, t_1^{ma}(y + t_2 x^m))$
4. Para $D = f(x)\frac{\partial}{\partial y}$ para algún $f(x) \in k[x]$ su acción es $(x, y) \mapsto (x, y + t_2 f(x))$.

Ejemplo

La derivación localmente finita $D = x\frac{\partial}{\partial x} + (4x + 2y)\frac{\partial}{\partial y}$ es semisimple pura, equivalente a la derivación semisimple $x\frac{\partial}{\partial x} + 2y\frac{\partial}{\partial y}$ conjugada con el automorfismo lineal $F(x, y) = (x, 4x + y)$, y produce una descomposición de $\mathbb{C}[x, y]$

$$\mathbb{C}[x, y] = \bigoplus_{i,j\geq 0} \mathbb{C}x^i(4x + y)^j$$

Su acción de $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$ es
$(t_1, t_2) \cdot (x, y) = F \circ (t_1 x, {t_1}^2 y) \circ F^{-1} = (t_1 x, -4t_1 x + 4{t_1}^2 x + t_1^2 y)$

Endomorfismos Localmente finitos

Endomorfismo

Sea X una variedad algebraica afín. Un endomorfismo F es un morfismo de variedades algebraicas definido sobre la misma variedad $F : X \longrightarrow X$.

Endomorfismo localmente finito

Sea F un endomorfismo sobre una variedad algebraica afín X. Si F es cero de algún polinomio $P(t) \in \mathbb{C}[t]$, diremos que F es un endomorfismo polinomial localmente finito (LFPE).

Automorfismo localmente finito

En particular todo automorfismo es un endomorfismo . Nuestro interés principal son los automorfismos localmente finitos.

Automorfismo semisimple

Sea F un automorfismo polinomial localmente finito (LFPE) sobre una variedad algebraica afín X. F es semisimple si es cero de algún polinomio $P(t) \in \mathbb{C}[t]$ separable sin multiplicidades, es decir, existen $a_i \in \mathbb{C}$ tal que $P(t) = (t - a_1)(t - a_2) \cdots (t - a_r)$.

Endomorfismo nilpotente

Sea F un LFPE sobre una variedad algebraica afín X. F es nilpotente si para $x \in X$ existe $n \in \mathbb{Z}_{\geq 0}$ tal que $F^n(x) = 0$,(cero de algún polinomio $P(t) \in \mathbb{C}[t]$, $P(t) = t^n$).

Automorfismo unipotente

Sea F un LFPE sobre una variedad algebraica afín X. F es unipotente, si $F - I$, es nilpotente (cero de $P(t) = (t - 1)^m$).

Ejemplo

Sea F el LFPE definido sobre $\mathbb{A}^2$

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (3x + y^2, y) \end{array}$$

Satisface ser cero del polinomio $P(T) = T^2 - 4T + 3$. Además $F^n = (3^n x + \frac{1}{2}(3^n - 1)y^2, y)$ y $F^n F^{n'} = F^{n+n'}$ y $F^0 = Id$.
Notar que si permitimos que $n \in \mathbb{C}$ la expresión anterior define un flujo.

Descomposición de Dunford-Jordan

Sea F un LFPE invertible . Entonces F admite una descomposición $F = F_s F_u = F_u F_s$, donde F_u es unipotente y F_s es semisimple.

Ejemplo

Sea F el endomorfismo localmente finito definido sobre $\mathbb{A}^2$

$$\begin{array}{rcl} F : \mathbb{A}^2 & \longrightarrow & \mathbb{A}^2 \\ (x, y) & \mapsto & (4x + 4y^2, 2y) \end{array}$$

con
$F = (4x + 4y^2, 2y) = (4x, 2y) \circ (x + y^2, y) = (x + y^2, y) \circ (4x, 2y)$
con la descomposición:
$F_s = (4x, 2y) = (\exp(\ln(4) x \frac{\partial}{\partial x} + \ln(2) \frac{\partial}{\partial y}))(x, y)$ y
$F_u = (x + y^2, y) = (\exp(y^2 \frac{\partial}{\partial x}))(x, y)$.

Logaritmo de un automorfismo unipotente

Sea A un $\mathbb{C}$-dominio y $F^* : A \longrightarrow A$ un automorfismo unipotente. Definimos el logaritmo de F^* como la aplicación $\mathrm{Log}(F^*) : A \longrightarrow A$, dada por

$$\mathrm{Log}F^*(a) = \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (F^* - \mathrm{Id}_A)^{(i)}(a)$$

está bien definida pues $F^* - \mathrm{Id}_A$ es nilpotente.

Proposición

Dado F^*, F_1^*, F_2^* automorfismos unipotentes con $\mathrm{Log}F_2^* \circ \mathrm{Log}F_1^* = \mathrm{Log}F_1^* \circ \mathrm{Log}F_2^*$, y φ automorfismo sobre un $\mathbb{C}$-dominio A. Se tiene que

1. $\mathrm{Log}(\varphi F^* \varphi^{-1}) = \varphi \mathrm{Log}F^* \varphi^{-1}$.
2. $\mathrm{Log}(F_1^* F_2^*) = \mathrm{Log}(F_1^*) + \mathrm{Log}(F_2^*)$

Automorfismos unipotentes

Proposición

Los automorfismos unipotentes están en correspondencia con las derivaciones localmente nilpotentes (LND).

$$\begin{array}{rcl} \{\text{Automorfismos Unipotentes}\} & \longleftrightarrow & \{\ \text{LND}\} \\ F_u^* & \rightarrow & \text{Log} F_u^* \\ \exp D_n & \leftarrow & D_n \end{array}$$

Objetivo

Nuestro objetivo es responder a la siguiente pregunta, será posible definir una aplicación logaritmo sobre un automorfismo semisimple F_s^* y darle un sentido a está expresión como en el caso unipotente?.

$$\mathrm{Log} F_s^* = \sum_{i \geq 1} \frac{(-1)^{i+1}}{i} (F_s^* - \mathrm{Id}_A)^{(i)}$$

De ser afirmativa esta interrogante podríamos responder a lo siguiente

Automorfismos semisimples

Pregunta

Si D_s es una derivación semisimple, entonces $\exp D_s$ es un automorfismo semisimple.
No se sabe si recíprocamente esto es cierto, es decir, si F_s^* es un automorfismo semisimple $\mathrm{Log} F_s^*$ será una derivación semisimple?

$$\begin{array}{ccc} D_s & \rightarrow & \exp D_s \\ F_s^* & \rightarrow & \mathrm{Log} F_s^* \ ? \end{array}$$

Automorfismos semisimples sobre $\mathbb{C}[x, y]$

En [5] se prueba que todo automorfismo semisimple F en el plano $\mathbb{A}^2$, es conjugado a (ax, by), $a, b \in \mathbb{C}$
Por lo tanto se verifica que toda derivación semisimple, proviene del logaritmo de un automorfismo semisimple.

$$F^* \quad \xrightarrow{\text{Log()}} \quad \varphi^* \circ (\log(a)x\frac{\partial}{\partial x} + \log(b)y\frac{\partial}{\partial y}) \circ \varphi^{*-1}$$

Conjetura

Dado un automorfismo semisimple F_s^* sobre $\mathbb{C}^{[n]}$, existe una derivación semisimple, denotada por $\mathrm{Log}(F_s^*)$, tal que $\exp(\mathrm{Log}(F_s^*)) = F_s^*$.

Consecuencias

1. $\mathrm{LFAut}(\mathbb{C}^{[n]}) = \exp(\mathrm{LFDer}(\mathbb{C}^{[n]})$
2. Cada automorfismo localmente finito define un flujo.
3. $\mathrm{LFAut}(\mathbb{C}^{[n]}) \lhd \mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{[n]})$

Ideas proyecto de tesis

1. Clasificar las $\mathbb{G}_m \times \mathbb{G}_a$-acciones y derivaciones localmente finitas con autovalores enteros sobre $\mathbb{C}[x, y, z]$.
2. Establecer la correspondencia entre derivaciones localmente finitas y los automorfismos localmente finitos sobre $\mathbb{C}[x, y, z]$.
3. $\mathrm{Aut}(\mathbb{C}^{[3]}) =< \mathrm{LFAut}(\mathbb{C}^{[3]}) >$?

Bibliografía

1. Gene Freudenburg, Algebraic Theory of Locally Nilpotent Derivations.
2. A. Van Den Essen, Locally Finite and Locally Nilpotent Derivations with Applications to Polynomial, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 116, No. 3. (Nov., 1992), pp. 861-871 Flows and Polynomial Morphism.
3. A. Van den Essen A. Polynomial automorphisms and the Jacobian conjecture (Birkhauser, 2000)(L)(174s).
4. https://math.berkeley.edu/$\sim$ ogus/old/Math$_5$4-05/webfoils/jordan.pdf
5. P.Furter, S. Maubach, A characterization of semisimple Plane polynomial automorphisms. MSC 14R10

¡Gracias!