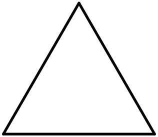
Grupo de automorfísmo de variedades tóricas no necesariamente normales

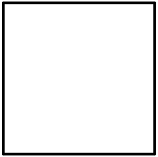
Roberto Díaz Vivanco

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

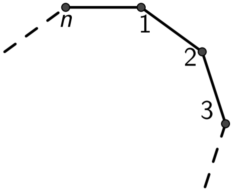
27 de marzo de 2018



$$D_6 = \langle r, s | r^3 = s^2 = 1,\ rs = sr^{-1} \rangle$$



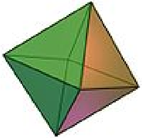
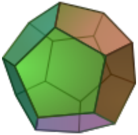
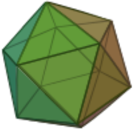
$$D_8 = \langle r, s | r^4 = s^2 = 1,\ rs = sr^{-1} \rangle$$

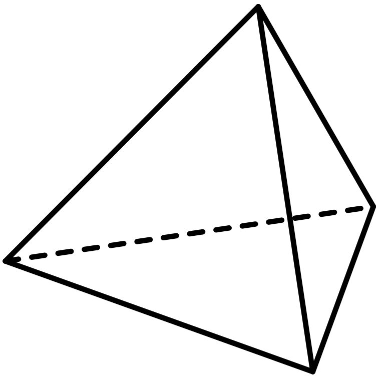


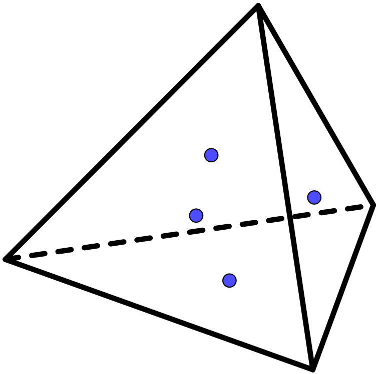
$$D_{2n} = \langle r, s | r^n = s^2 = 1, \;\; rs = sr^{-1} \rangle$$

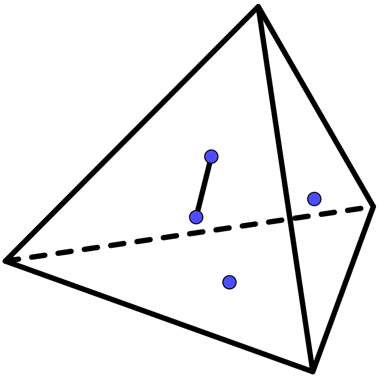
Felix Klein, 1872

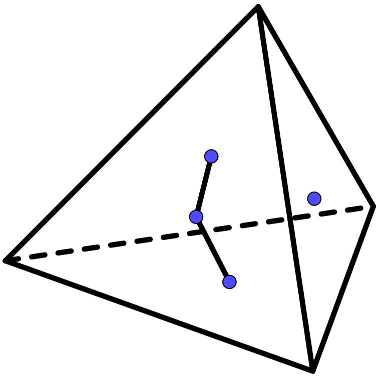
¿Puede el grupo de simetrías de un objeto gemétrico, determinar a este?

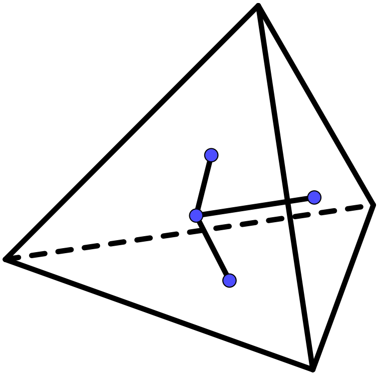
Tetraedro	Hexaedro	Octaedro	Dodecaedro	Icosaedro
				
S_T	S_H	S_O	S_D	S_I

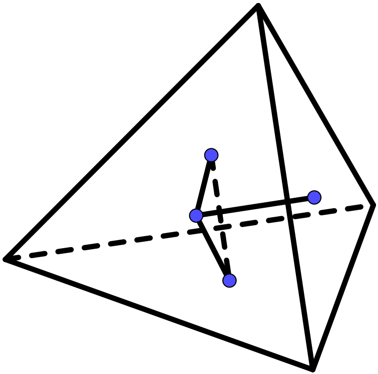


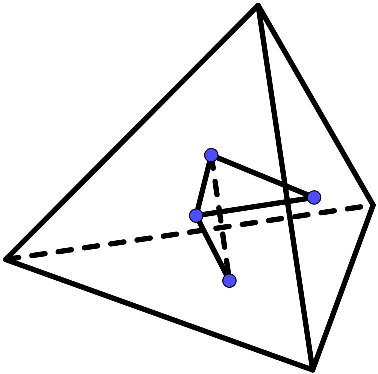


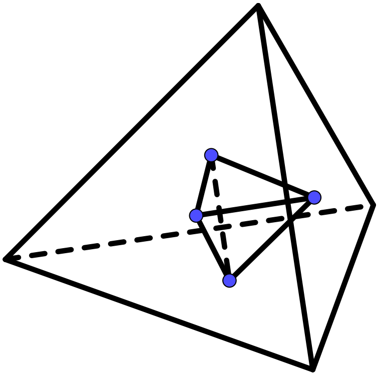












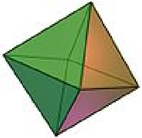
Tetraedro

Caras= 4
Vértices=4

Hexaedro

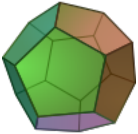
Caras=6
Vértices=8

Octaedro



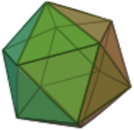
Caras=8
Vértices=6

Dodecaedro

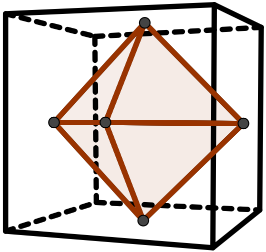


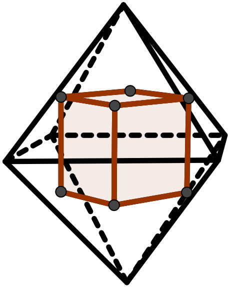
Caras=12
Vértices=20

Icosaedro



Caras=20
Vértices=12



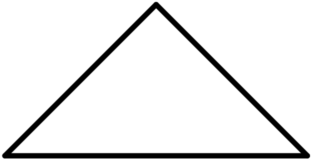


$S_H \subset S_O$ $\qquad$ $S_O \subset S_H$

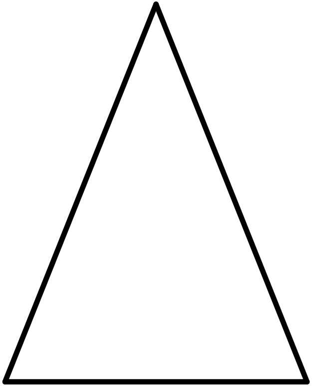
$$S_H = S_O$$

$$S_H \simeq S_O$$

Poliedros regulares no son determinados por su grupo de Simetría.



$\langle s | s^2 = 1 \rangle$



$\langle s | s^2 = 1 \rangle$

Si consideramos el objeto geométrico una variedad alegebraica X y el grupo de simetrías como el grupo de automorfimos $\mathrm{Aut}(X)$.

$(X, \mathscr{O}_X) \simeq (V, \mathscr{O}_V)$

observación

$$(f, \phi) : (X, \mathscr{O}_X) \longrightarrow (Y, \mathscr{O}_Y)$$

1. $f : X \longrightarrow Y$ es una función continua.
2. $\phi : \mathscr{O}_Y \to f^*\mathscr{O}_X$ es un morfismo de haces.
3. $f^*\mathscr{O}_X$ es el haz sobre Y que asocia a cada abierto U de Y el anillo $\mathscr{O}_X(f^{-1}(U))$.

(Kraft, 2015) Sea X una variedad algebraica afín conexa. Si $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(\mathbb{A}^n)$, entonces $X \simeq \mathbb{A}^n$.

Definición

Una Variedad tórica afín es una variedad algebraica afín normal dotada con una acción efectiva de $\mathbb{T} \simeq (k^*)^n = \mathbb{G}_m^n$, con la orbita general densa.

1. Variedad tórica afín
2. Variedad tórica afín no normal
3. Variedad tórica
4. Variedad tórica no normal

1. Variedad tórica afín

Teorema (Liendo, Regeta, Urech. 2018)

Sea X una variedad tórica afín diferente del toro algebraico y sea Y una variedad normal. Si $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(Y)$ son isomorfos, entonces X e Y son isomorfos como variedades abstractas.

Ind-variedad

Es un conjunto V con una filtración ascendente $V_0 \subset V_1 \subset ... \subset V$ tal que las siguientes condiciones se verifican:

1. $V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$.
2. Cada V_k tiene estructura de variedad algebraica.
3. Para cada $k \in \mathbb{N}$ el subconjunto $V_k \subset V_{k+1}$ es cerrado en la topolología de Zariski.

Ejemplo

$\mathbb{N}$ con la filtración $V_1 \subset V_2 \subset ... \subset V$ donde $V_k = \{1, 2, ..., k\}$

Un morfismo entre ind-variedades $V = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} V_k$ y $W = \bigcup_{m \in \mathbb{N}} W_m$ es una aplicación $\phi : V \longrightarrow W$ tal que:

1. Para cada k existe un $m \in \mathbb{N}$ tal que $\phi(V_k) \subset W_m$.
2. $\phi|_{V_k} : V_k \longrightarrow W_m$ es un morfismo de variedades algebraicas.

Ind-Grupo

Una Ind-Variedad G es llamada ind-grupo si G es un grupo y

$$\begin{array}{ccc} G \times G & \longrightarrow & G \\ (g, h) & \mapsto & gh^{-1} \end{array}$$

Es un morfismos de ind-variedades.

Observación

Aut(X) tiene estructura de Ind-grupo.

Definición

Sea $\mathbb{T} \subset \mathrm{Aut}(X)$ es un toro en $\mathrm{Aut}(X)$. Un subgrupo cerrado $U \subset \mathrm{Aut}(X)$ isomorfo a $\mathbb{G}_a = (\mathbb{C}, +)$ es llamado subgrupo raíz con respecto a $\mathbb{T}$ si el normalizador de U en $\mathrm{Aut}(X)$ contiene a $\mathbb{T}$.

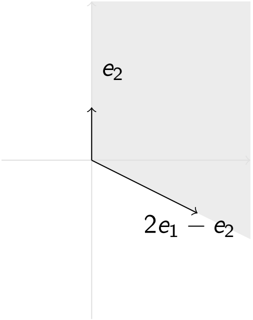
$$X = \{(x, y, z) \in \mathbb{C}^3 | xz - y^2 = 0\}$$

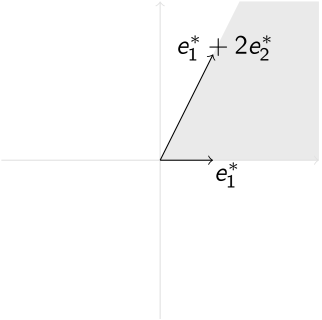
$$I = \langle xz - y^2 \rangle \subset \mathbb{C}[x, y, z]$$

$$\mathscr{O}_X(X) = \mathbb{C}[x, y, z]/I$$

Ejemplo

El cono $Cono(e_2, 2e_1 - e_2) \subset N_{\mathbb{R}}$



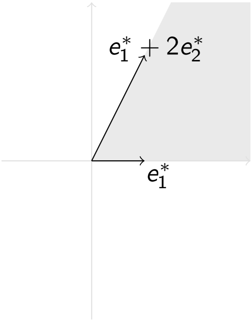


- $\sigma_M^\vee = \sigma^\vee \cap M$

Ejemplo

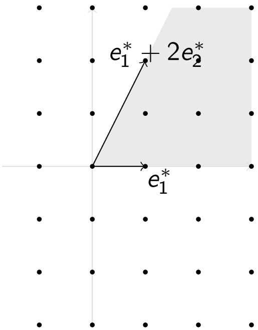
- $\sigma_M^\vee = \sigma^\vee \cap M$

Ejemplo



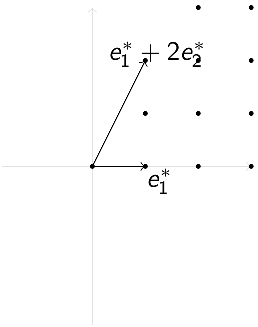
- $\sigma_M^\vee = \sigma^\vee \cap M$

Ejemplo



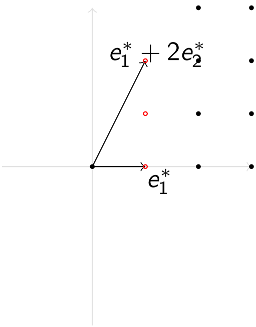
- $\sigma_M^\vee = \sigma^\vee \cap M$

Ejemplo



- $\sigma_M^\vee = \sigma^\vee \cap M$

Ejemplo



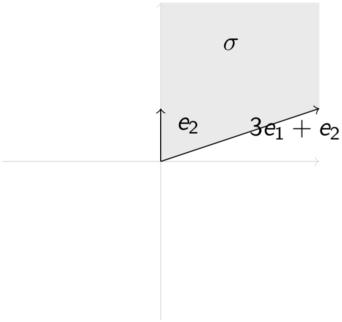
$$\sigma_M^\vee = \mathbb{N}\{e_1^*, e_1^* + e_2^*, e_1^* + 2e_2^*\}$$

$$\mathbb{C}[\sigma_M^\vee] = \mathbb{C}[\chi^{e_1^*}, \chi^{e_1^*+e_2^*}, \chi^{e_1^*+2e_2^*}]$$

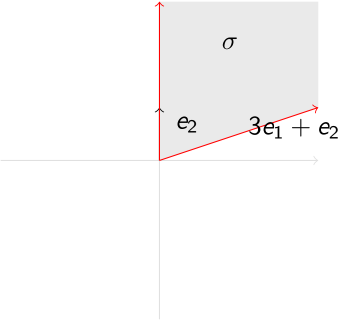
$$\begin{array}{rccl} f: & \mathbb{C}[x,y,z] & \longrightarrow & \mathbb{C}[\chi^{e_1^*}, \chi^{e_1^*+e_2^*}, \chi^{e_1^*+2e_2^*}] \\ & x & \mapsto & \chi^{e_1^*} \\ & y & \mapsto & \chi^{e_1^*+e_2^*} \\ & z & \mapsto & \chi^{e_1^*+2e_2^*} \end{array}$$

$$\mathbb{C}[x,y,z]/\langle xz - y^2 \rangle \simeq \mathbb{C}[\chi^{e_1^*}, \chi^{e_1^*+e_2^*}, \chi^{e_1^*+2e_2^*}]$$

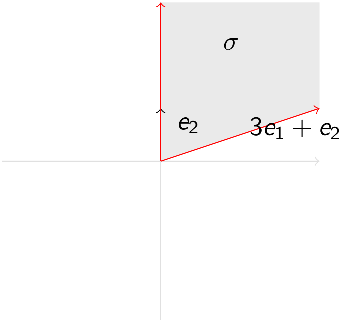
$$\sigma(1) = \{\rho \prec \sigma | \mathrm{dim}\rho = 1\}$$



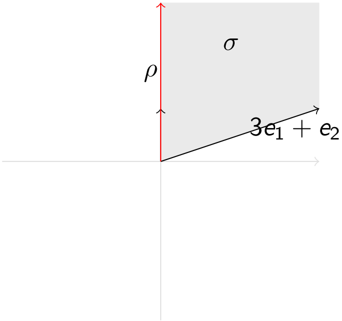
$$\sigma(1) = \{\rho \prec \sigma | \dim\rho = 1\}$$



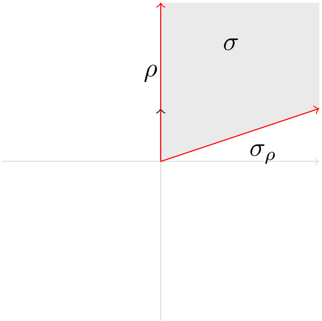
$\sigma(1) = \{\rho \prec \sigma | \dim\rho = 1\}$
para cada $\rho \in \sigma(1)$ asociamos $\sigma_\rho = cono(\{\rho' \in \sigma(1) | \rho' \neq \rho\})$



$\sigma(1) = \{\rho \prec \sigma | \dim \rho = 1\}$
para cada $\rho \in \sigma(1)$ asociamos $\sigma_\rho = cono(\{\rho' \in \sigma(1) | \rho' \neq \rho\})$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$

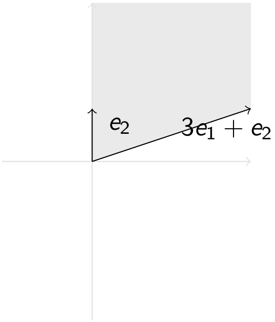


$\sigma(1) = \{\rho \prec \sigma | \dim \rho = 1\}$
para cada $\rho \in \sigma(1)$ asociamos $\sigma_\rho = cono(\{\rho' \in \sigma(1) | \rho' \neq \rho\})$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$

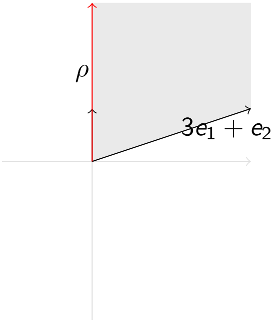


Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como $S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$

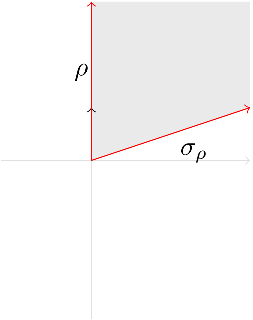
Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$



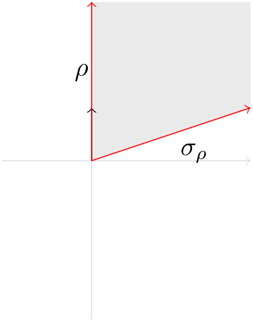
Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$

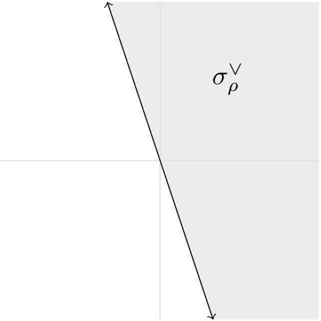


Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$

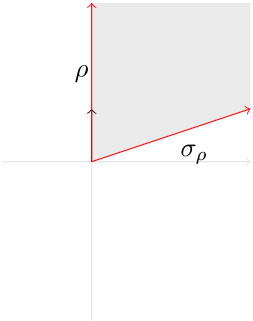


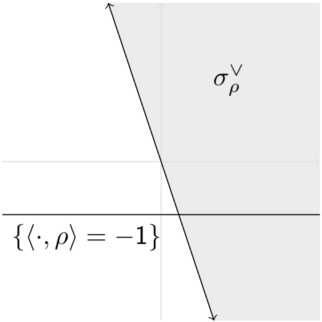
Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$



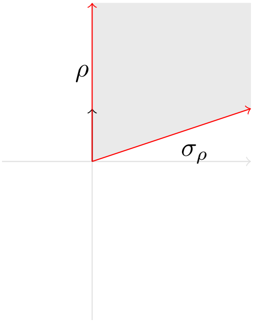


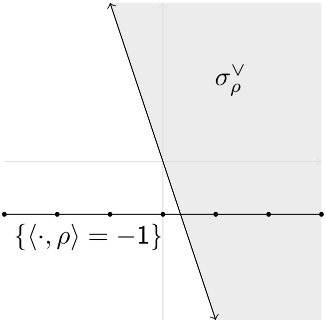
Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$



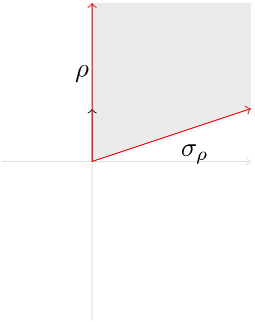


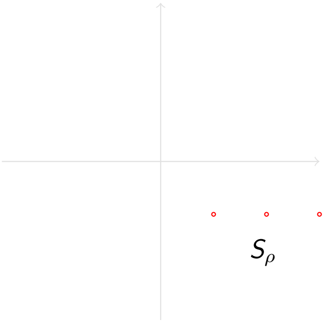
Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$



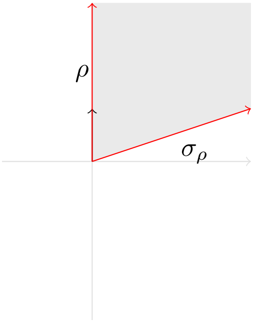


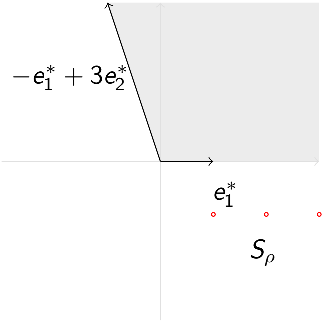
Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$



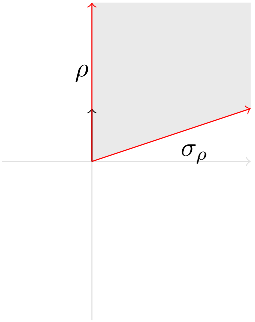


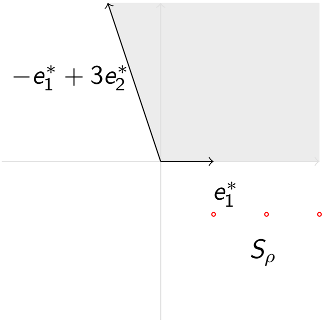
Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$





Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos el conjunto de raíces asociado a ρ como
$S_\rho = \sigma_\rho^\vee \cap \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1\}$
ejemplo: si $\rho = cono(e_2)$





$$\mathcal{R}(\sigma_M^\vee) := \bigcup_{\rho \in \sigma(1)} S_\rho$$

Demazure (1978), Liendo (2011). Si $\partial \neq 0$ es una derivación localmente nilpotente homogenea respecto a la M-graduación de $\mathcal{O}(X_\sigma)$, entonces $\partial = \lambda \partial_{\rho,e}$ para algún $\rho \in \sigma(1)$, algún $e \in S_\rho$, y algún $\lambda \in k^*$.

$$
\begin{array}{ccc}
\{\text{DLN homogenea de } \mathcal{O}(X_\sigma)\} & \Longleftrightarrow & \{\mathbb{G}_a - \text{Acciones sobre } X_\sigma\} \\
\Updownarrow & & \Updownarrow \\
\mathcal{R}(\sigma_M^\vee) & \Longleftrightarrow & \{\text{Subgrupo raíz de } \operatorname{Aut}(X_\sigma)\}
\end{array}
$$

D Derivación localmente nilpotente homogenea sobre $\mathscr{O}_X(X)$

$$\begin{array}{rccc} \eta: & \mathbb{G}_a & \longrightarrow & Aut(X) \\ & t & \mapsto & (exp(tD))^* \end{array}$$

$$\begin{array}{rccc} exp(tD): & \mathscr{O}_X(X) & \longrightarrow & \mathscr{O}_X(X) \\ & f & \mapsto & exp(tD)(f) = \sum_{i \geq 0} \frac{t^i}{i!} D^{(i)}(f) \end{array}$$

$$\rho : \quad \mathbb{G}_a \times X \quad \longrightarrow \quad X$$

$$\rho^* : \quad \mathscr{O}_X(X) \quad \longrightarrow \quad \mathscr{O}_X(X)[t]$$

$$\mathscr{O}_X(X) \quad \xrightarrow{\rho^*} \quad \mathscr{O}_X(X)[t] \quad \xrightarrow{\frac{d}{dt}} \quad \mathscr{O}_X(X)[t] \quad \xrightarrow{|_{t=0}} \quad \mathscr{O}_X(X)$$

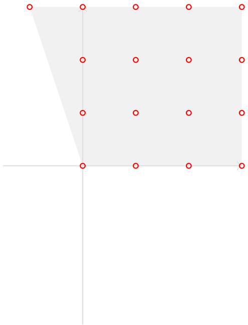
$$D = \left(\frac{d}{dt} \circ \rho^* \right) |_{t=0}$$

Teorema (Liendo, Regeta, Urech. 2018)

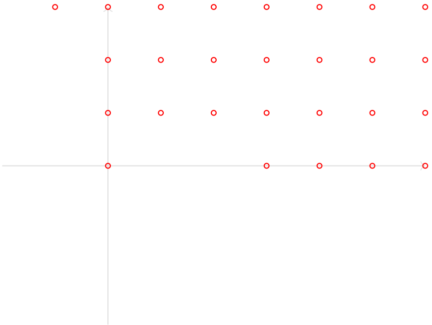
Sea X una variedad tórica afín diferente del toro algebraico y sea Y una variedad **normal**. Si $\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(Y)$ son isomorfos, entonces X e Y son isomorfos como variedades abstractas.

2. Variedad tórica afín no normales

$\sigma^\vee \cap M$

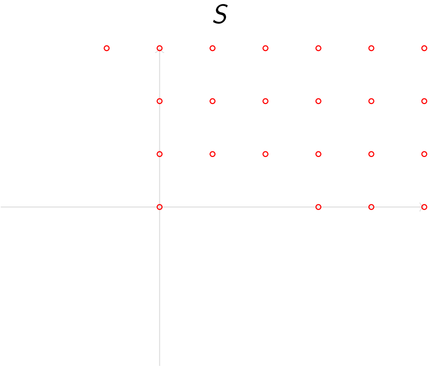


S

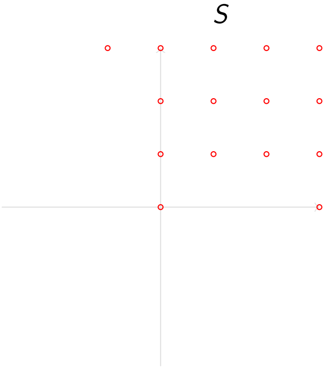


$\{\text{Subgrupo raíz de } \operatorname{Aut}(X)\} \Longleftrightarrow \{\text{Raíces } \mathcal{R}(S) \text{ del semigrupo } S\}$

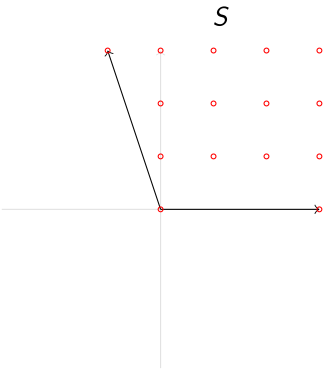
X es una variedad tórica afín con el semigrupo afín S



X_S es una variedad tórica afín con semigrupo afín S
$\sigma^\vee = Cono(S)$

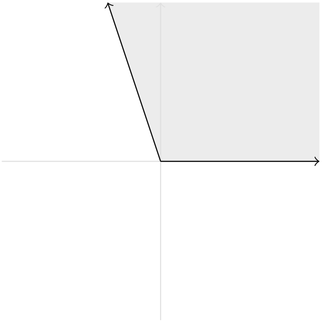


X_S es una variedad tórica afín con semigrupo afín S
$\sigma^\vee = Cono(S)$

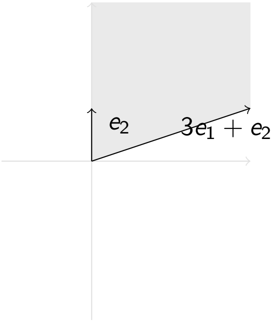


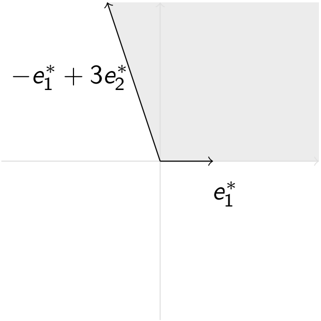
X_S es una variedad tórica afín con semigrupo afín S
$\sigma^\vee = Cono(S)$

$cono(S)$

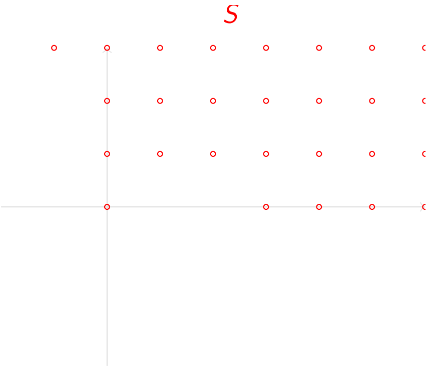


$\sigma = cono(S)^{\vee}$

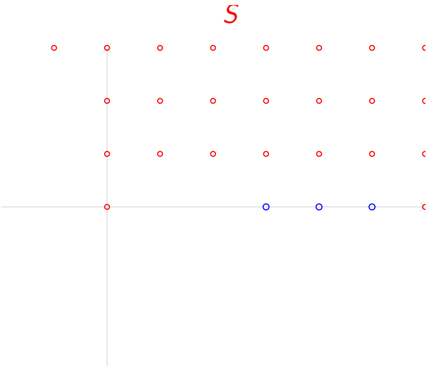




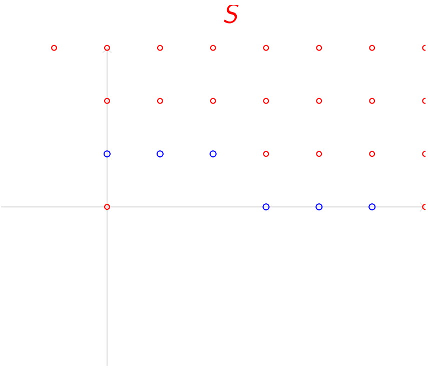
- S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.



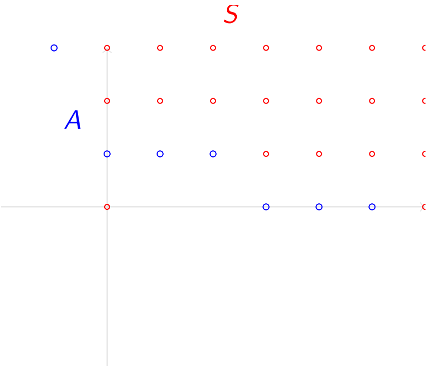
. S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.



. S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.



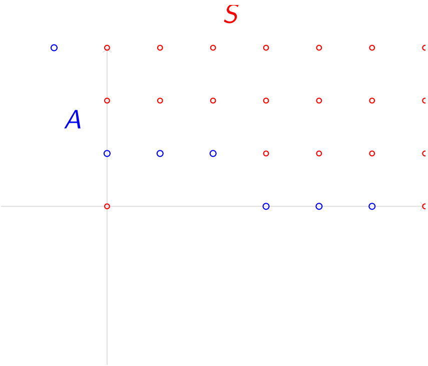
- S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.



. S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.

Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos:

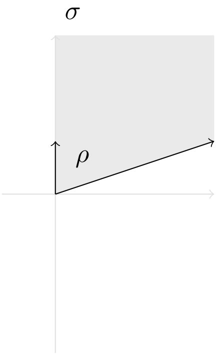
$$s_\rho = \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1 \wedge \forall\ a \in A \text{ tal que } \langle a, \rho \rangle > 0, a + e \in S\}$$

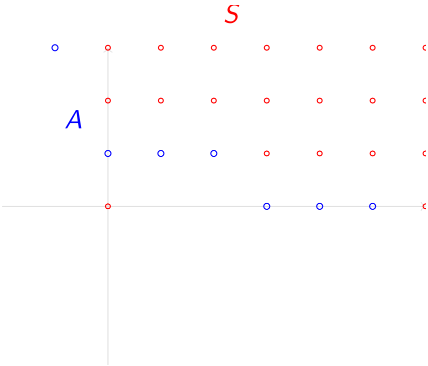


- S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.

Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos:

$$s_\rho = \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1 \wedge \forall\ a \in A \text{ tal que } \langle a, \rho \rangle > 0, a + e \in S\}$$

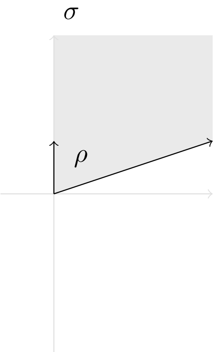


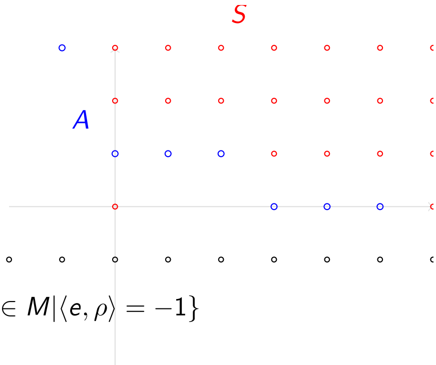


- S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.

Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos:

$$s_\rho = \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1 \wedge \forall \ a \in A \text{ tal que } \langle a, \rho \rangle > 0, a + e \in S\}$$

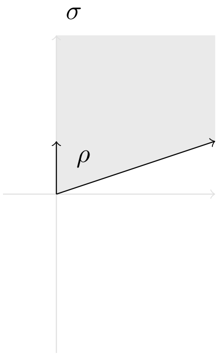


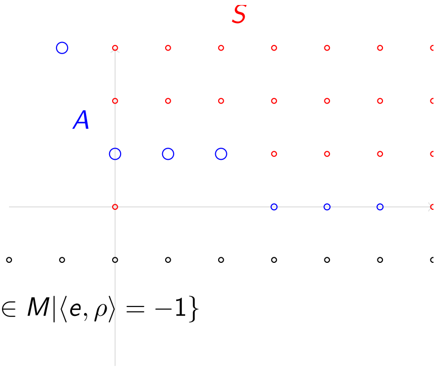


. S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.

Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos:

$$s_\rho = \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1 \wedge \forall\ a \in A \text{ tal que } \langle a, \rho \rangle > 0, a + e \in S\}$$

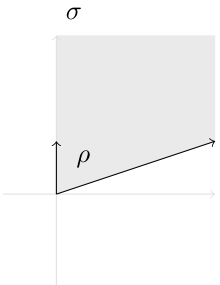


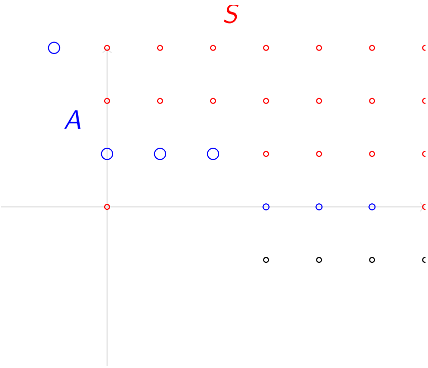


. S es el semigrupo afín asociado a una variedad tórica afín $A \subset S$ subconjunto finito tal que $A\mathbb{N} = S$.

Para $\rho \in \sigma(1)$ definimos:

$$s_\rho = \{e \in M | \langle e, \rho \rangle = -1 \wedge \forall\ a \in A \text{ tal que } \langle a, \rho \rangle > 0, a + e \in S\}$$

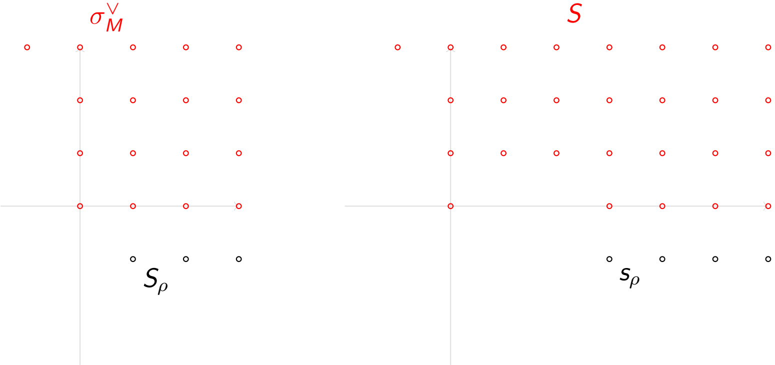




$$\mathcal{R}(S) := \bigcup_{\rho \in \sigma(1)} s_\rho$$

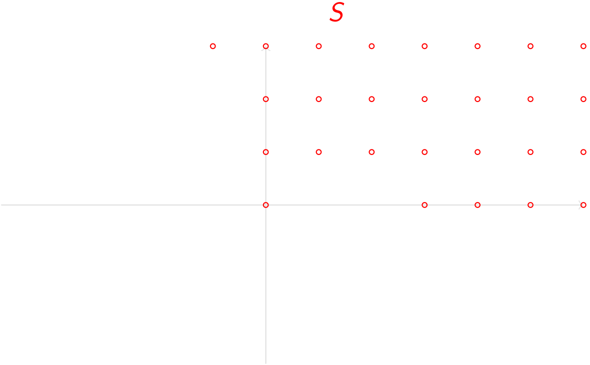
Teorema 1

Si $\partial \neq 0$ es una derivación localmente nilpotente homogenea respecto a la M-graduación de $\mathcal{O}(X_S)$, entonces $\partial = \lambda\partial_{\rho,e}$ para algún $\rho \in \sigma(1)$, algún $e \in s_\rho$, y algún $\lambda \in k^*$

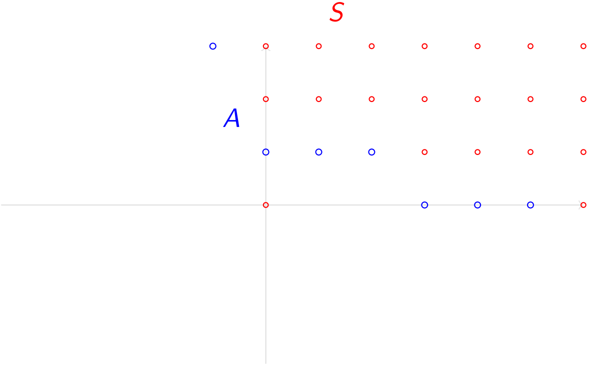


¿Existe una variedad tórica afín no normal que tenga el mismo grupo de raíces que su normalización?

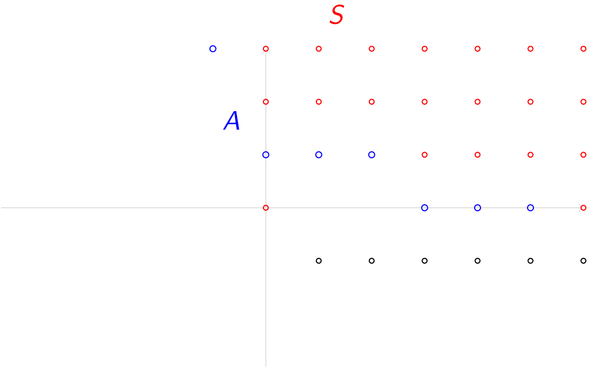
$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \backslash S\}$$



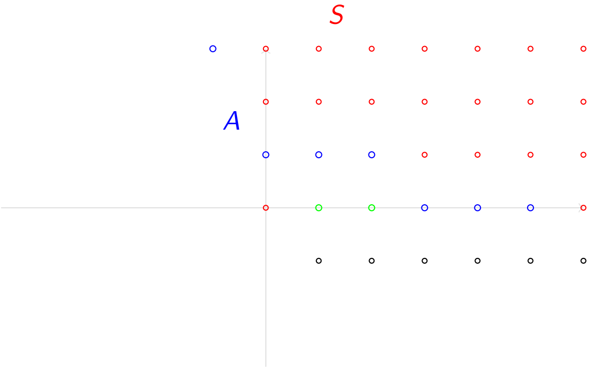
$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \backslash S\}$$



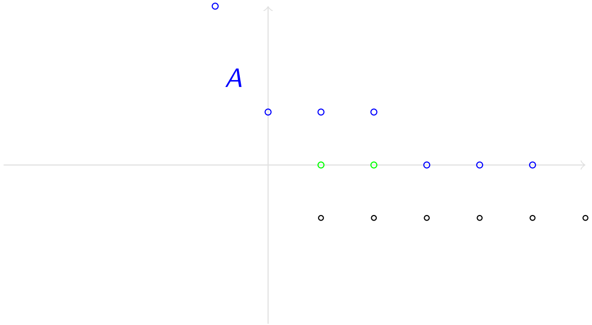
$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \backslash S\}$$



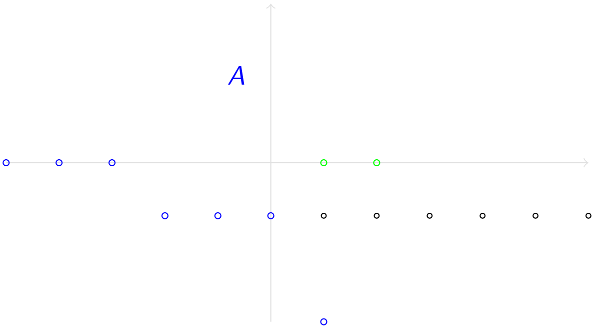
$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \backslash S\}$$



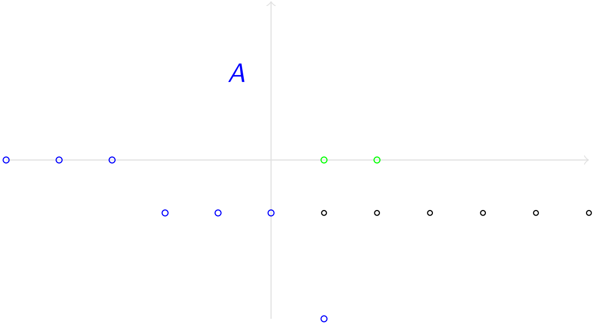
$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \backslash S\}$$



$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \backslash S\}$$

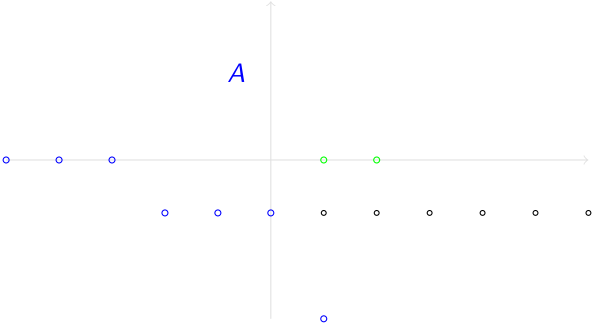


$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \backslash S\}$$



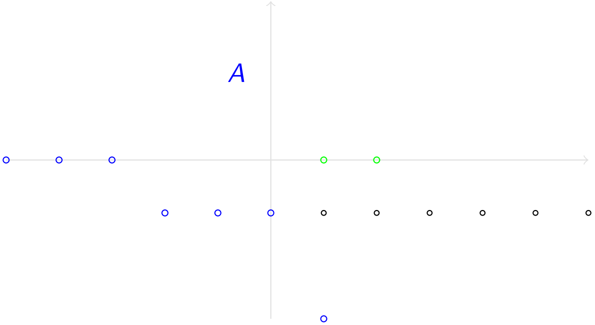
$$A_\rho = \{ \qquad\qquad \}$$

$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \setminus S\}$$



$$A_\rho = \{e_1^* + e_2^* \qquad \}$$

$$A_\rho := \{a \in A | s - a \in S_\rho \text{ con } s \in \sigma_M^\vee \backslash S\}$$



$$A_\rho = \{e_1^* + e_2^*,\ \ e_2^*\}$$

Teorema 2

Para $\rho \in \sigma(1)$, donde σ es el cono asociado a la normalización de una variedad tórica afín no normal, entonces:

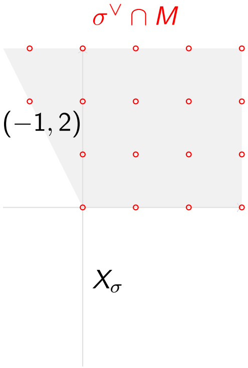
$$S_\rho = s_\rho \Leftrightarrow A_\rho = \phi$$

Observación: Sea X variedad tórica afín no normal y X_σ su normalización entonces:
$\mathrm{Aut}(X) \simeq \mathrm{Aut}(X_\sigma)$ si y solo si $\displaystyle\bigcup_{\rho\in\sigma(1)} A_\rho = \varnothing$.

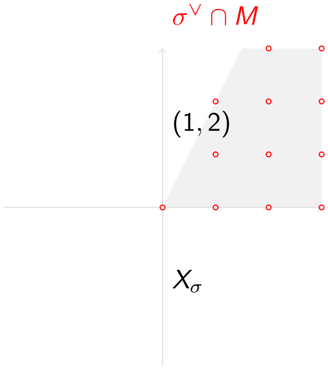
Corolario

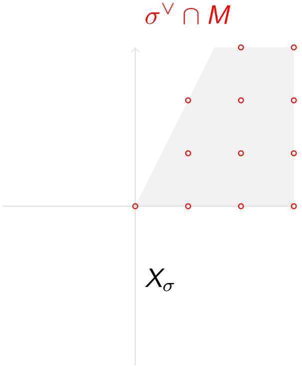
Sea X una superficie tórica afín, X es determinada por $\mathrm{Aut}(X)$ si y solo si $X \simeq \mathbb{A}^2$.

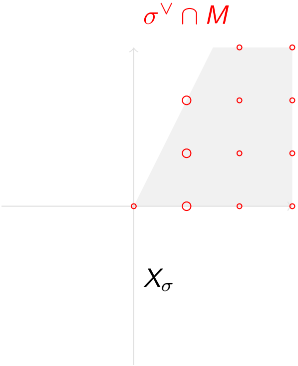
$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

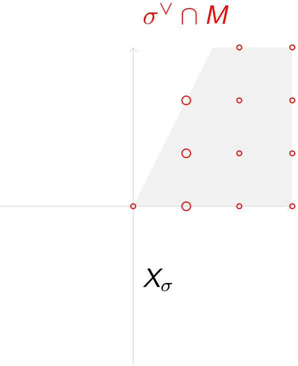


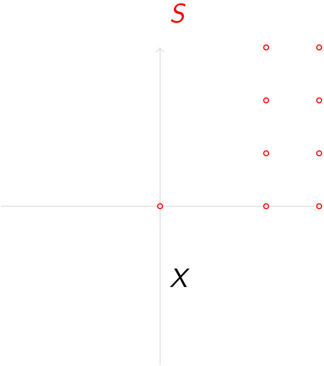
$\longrightarrow$




$\sigma^\vee \cap M$
X_σ

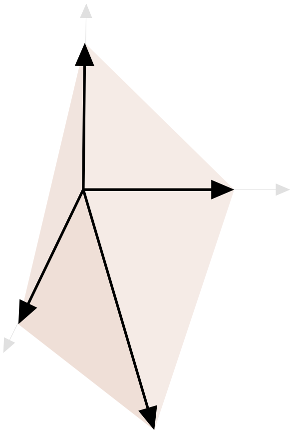

$\sigma^\vee \cap M$
X_σ


$\sigma^\vee \cap M$
X_σ

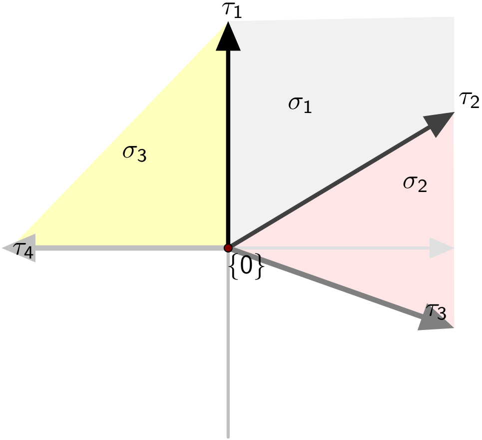

S
X

Por realizar

1. Generalizar el corolario anterior para dimensiones mayores.



3. Variedad tórica



$$\sum = \{\{0\}, \tau_1, \tau_2, \tau_3, \tau_4, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3\}$$

Demazure (1978)
$\{\text{subgrupo raíz de } \operatorname{Aut}(X_\Sigma)\} \Longleftrightarrow \{\text{conjunto de raíces } R(\Sigma)\}$

4. Variedad tórica no normales

1. Encontrar objetos que generalice el concepto de abanico.
2. De los objetos que generalizan un abanico encontrar el adecuado que describa variedades tóricas no normales o parte de ellas.
3. Encontrar una correspondencia en la generalización del abanico, que permita explicitar los grupos raices.
4. Obtener resultados sobre el grupo de automorfismos de variedades tóricas no normales.

Muchas Gracias