Characters formulas for unitary representations of cyclotomic rational Cherednik algebras

Elizabeth Manosalva Peñaloza

Universidad de Talca
Instituto de Matemática y Física

02 de Mayo de 2018

Contenidos

Contenidos

- V un $\mathbf{C}$-espacio vectorial de dimensión finita.
- $W \subseteq GL(V)$ grupo finito.
- $R = \{r \in W \mid codim(fix(r)) = 1\}$.

Para cada $r \in R$, fijamos

- $\alpha_r \in V^*$ tal que

$$fix_V(r) = \{v \in V | \alpha_r(v) = 0\}$$

- $c_r \in \mathbf{C}$ tal que

$$c_r = c_{wrw^{-1}}$$

  para todo $r \in R$ y $w \in W$.

Operadores de Dunkl

Cada $y \in V$ define un **Operador de Dunkl** en $\mathbf{C}[V]$ dado por

$$y(f) = \partial_y(f) - \sum_{r \in R} c_r \alpha_r(y) \frac{f - r(f)}{\alpha_r}$$

para $f \in \mathbf{C}[V]$.

Operadores de Dunkl

Cada $y \in V$ define un **Operador de Dunkl** en $\mathbf{C}[V]$ dado por

$$y(f) = \partial_y(f) - \sum_{r \in R} c_r \alpha_r(y) \frac{f - r(f)}{\alpha_r}$$

para $f \in \mathbf{C}[V]$.

Conmutan!!

El **álgebra de Cherednik** (rational Cherednik Algebra) $H_c = H_c(W, V)$ (donde $c = (c_r)_{r\in R}$) es el subálgebra de $\mathrm{End}_{\mathbf{C}}(\mathbf{C}[\mathrm{V}])$ generada por

- W
- $\mathbf{C}[V]$ actuando sobre sí mismo por multiplicación
- Operadores de Dunkl para cada $y \in V$.

El Algebra de Cherednik se puede presentar como el álgebra generada por el álgebra del grupo $\mathbf{C}W$, los operadores conmutativos $y \in V$ y los operadores conmutativos $x \in V^*$, sujeto a las relaciones

- $wxw^{-1} = w(x)$
- $wyw^{-1} = w(y)$
- $yx - xy = x(y) - \sum_{r \in R} c_R \alpha_r(y) x(\alpha_r^\vee) r$

para $w \in W$, $x \in V^*$ y $y \in V$.
Donde $\alpha_r^\vee \in V$ está determinado por

$$r(x) = x - x(\alpha_r^\vee)\alpha_r$$

El teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt (PBW) establece que la multiplicación induce un isomorfismo de

$$\mathbf{C}[V] \otimes \mathbf{C}W \otimes \mathbf{C}[V^*] \cong H_c$$

en el álgebra con esta presentación.

Contenidos

Dado $E \in \mathrm{Irr}(\mathbf{C}W)$. Definimos el **Módulo estándar** $\Delta_c(E)$ para H_c como

$$\Delta_c(E) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{C}[V^*]\rtimes W}^{H_c}(E),$$

donde $\mathbf{C}[V^*] \rtimes W$ es el subálgebra de H_c generada por V y W, y actúa sobre E por

$$ye = 0 \qquad \forall y \in V, \forall e \in E.$$

Representaciones

Dado $E \in \mathrm{Irr}(\mathbf{C}W)$. Definimos el **Módulo estándar** $\Delta_c(E)$ para H_c como

$$\Delta_c(E) = \mathrm{Ind}_{\mathbf{C}[V^*] \rtimes W}^{H_c}(E),$$

donde $\mathbf{C}[V^*] \rtimes W$ es el subálgebra de H_c generada por V y W, y actúa sobre E por

$$ye = 0 \qquad \forall y \in V, \forall e \in E.$$

Como $\mathbf{C}[V] \rtimes W$-módulo se tiene que

$$\Delta_c(E) \cong \mathbf{C}[V] \otimes E.$$

Fijamos una forma hermitiana W-invariante definida positiva en V, induciendo un isomorfismo W-equivariante y conjugado-lineal con V^*

$$\begin{array}{ccc} V & \rightleftarrows & V^* \\ y & \mapsto & \overline{y} \\ \overline{x} & \mapsfrom & x \end{array}$$

Fijamos una forma hermitiana W-invariante definida positiva en V, induciendo un isomorfismo W-equivariante y conjugado-lineal con V^*

$$\begin{array}{ccc} V & \rightleftarrows & V^* \\ y & \mapsto & \overline{y} \\ \overline{x} & \leftarrow\!\shortmid & x \end{array}$$

Si W actúa irreducible sobre V éstos están determinados salvo por un escalar no-nulo.

Transformada de Fourier

Si c es real, en el sentido de que $\overline{c_r} = c_{r^{-1}}$, entonces existe un anti-automorfismo ϕ de H_c definido por

- $\phi(x) = \overline{x}$
- $\phi(y) = \overline{y}$
- $\phi(w) = w^{-1}$

Forma contravariante

Cada módulo estándar posee una **forma contravariante**, $(\cdot,\cdot)_c$ definida por la fórmula

$$(f_1 \otimes e_1, f_2 \otimes e_2)_c = (e_1, [\phi(f_1)\cdot(f_2 \otimes e_2)](0))$$

donde $(\cdot,\cdot)$ es una forma hermitiana definida positiva W-invariante en E.

- Es contravariante en sentido

$$(h \cdot f_1, f_2)_c = (f_1, \phi(h)\cdot f_2)_c$$

- Además, se tiene que

$$(f_1, f_2)_c = \overline{(f_2, f_1)_c}$$

Representación irreducible

Definimos la siguiente representación irreducible para H_c

$$L_c(E) = \Delta_c(E) \big/ \mathrm{Rad}(\cdot, \cdot)_c$$

Representación irreducible

Definimos la siguiente representación irreducible para H_c

$$L_c(E) = \Delta_c(E)/\mathrm{Rad}(\cdot, \cdot)_c$$

$L_c(E)$ es una **representación unitaria** cuando $(\cdot, \cdot)_c$ es definida positiva en $L_c(E)$.

Categoría $\mathcal{O}_c$

La categoría $\mathcal{O}_c(W, V)$ consiste de los H_c-módulos M tales que

- son finitamente generados
- son localmente nilpotentes para la acción de cada $y \in V$

Categoría $\mathcal{O}_c$

La categoría $\mathcal{O}_c(W, V)$ consiste de los H_c-módulos M tales que

- son finitamente generados
- son localmente nilpotentes para la acción de cada $y \in V$

Los módulos estándar pertenecen a la categoría $\mathcal{O}_c$.

Categoría $\mathcal{O}_c$

La categoría $\mathcal{O}_c(W, V)$ consiste de los H_c-módulos M tales que

- son finitamente generados
- son localmente nilpotentes para la acción de cada $y \in V$

Los módulos estándar pertenecen a la categoría $\mathcal{O}_c$.

Más aún la categoría $\mathcal{O}_c$ es la subcategoría de Serre generada por los módulos estándar.

Contenidos

Carácter graduado

El módulo $L_c(E)$ es el único cuociente irreducible $\Delta_c(E)$ y es graduado (respecto al grado de polinomios). Para $F \in \mathrm{Irr}\mathbf{C}W$, el **carácter graduado** está dado por

$$[L_c(E) : F]_q := \sum_{d \in \mathbf{Z}_{\geq 0}} \dim_{\mathbf{C}} \Big(\mathrm{Hom}_{\mathbf{C}W}(F, L_c(E)_{d+c_E}) \Big) q^d$$

Otro carácter

$$d^i_{EF} := \dim_{\mathbf{C}} Ext^i_{\mathcal{O}_c}(\Delta_c(F), L_c(E)) \qquad 0 \leq i \leq \dim V$$

Si $L_c(E)$ es unitaria, podemos usar el carácter graduado para calcularlo, pues

$$d^i_{EF} = \dim_{\mathbf{C}} \mathrm{Hom}_{\mathbf{C}W}(F, L_c(E)_{c_F - i} \otimes \wedge^i V)$$

Contenidos

El **grupo G(r,1,n)** consiste de las matrices $n \times n$ que tienen exactamente una entrada no nula, que es una raíz r-ésima de la unidad, en cada fila y cada columna.

El **grupo G(r,1,n)** consiste de las matrices $n \times n$ que tienen exactamente una entrada no nula, que es una raíz r-ésima de la unidad, en cada fila y cada columna.

G(r,1,n) actúa sobre $\mathbf{C}^n$

Sea ζ una r-ésima raíz primitiva de la unidad. Denotamos

- ζ_i a la matriz diagonal que tiene 1's en la diagonal, excepto en la posición i donde aparece ζ.
- $s_{i,j}$ para la matriz de permutación que cambia las coordenadas i y j, es decir, la transposición (i, j).

- El conjunto de reflexiones de $G(r,1,n)$ es $R = R_1 \cup R_2$, donde

$$R_1 = \{\zeta_i^j \,|\, 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq r-1\}$$

y

$$R_2 = \{\zeta_i^l s_{i,j} \zeta_i^{-l} \,|\, 1 \leq i < j \leq n; 0 \leq l \leq r-1\}$$

- El conjunto de reflexiones de $G(r, 1, n)$ es $R = R_1 \cup R_2$, donde

$$R_1 = \{\zeta_i^j | 1 \leq i \leq n; 1 \leq j \leq r-1\}$$

y

$$R_2 = \{\zeta_i^l s_{i,j} \zeta_i^{-l} | 1 \leq i < j \leq n; 0 \leq l \leq r-1\}$$

- Los representantes de las clases de conjugación son ζ_1^i, para $1 \leq i \leq r-1$ y una transposición $s_{i,j}$, por lo que el álgebra de Cherednik correspondiente tiene r parámetros.

Contenidos

Objetivo de la tesis

El objetivo de la tesis será calcular $\dim \mathrm{Ext}^i_{\mathcal{O}_c}(\Delta_c(F), L_c(E))$, para $E, F \in \mathrm{Irr}\mathbf{C}W$, tales que $L_c(E)$ es unitaria.

Contenidos

- Clasificación de $L_c(E)$ unitarias y su estructura como módulo graduado sobre un álgebra de Hecke afín degenerado [Gri17]

- Homología de Dirac

- Coeficientes de Littlewood-Richardson

Bibliografía

[Gri17] S. Griffeth.
Unitary representations of cyclotomic rational cherednik algebras.
arXiv:1106.5094v2, 2017.