



## FÓRMULA DE CARDY ANISOTRÓPICA

SEBASTIÁN GÓMEZ RODRÍGUEZ <sup>1</sup>

Una tesis presentada en cumplimiento parcial de  
los requisitos para el grado de  
Doctor en Matemáticas

Instituto de Matemática y Física  
Universidad de Talca

Mayo 2017

---

<sup>1</sup> Sostenido en parte por Beca Doctorado Nacional 2013-CONICYT N° 21130136.



## AGRADECIMIENTOS

Por supuesto, no puedo comenzar sin agradecer a mi director de tesis Mokhtar Hassaïne por sus enseñanzas e infinitas charlas, por la motivación y el apoyo que siempre me ha dado, hasta en los momentos más difíciles de este camino, sin su presencia en estos cuatro años ni una de estas páginas existiría.

A incontables amigos, compañeros y profesores lo cuales contribuyeron a mi formación en estos cuatro años, con discusiones o simplemente una ayuda en los momentos que lo necesité, Luis Guajardo, Mauricio Vargas, Jorge Espinoza, Armin Gusembauer, Roque Bustamante, Deimer Julio, Victor Saldaña, los profesores Luc Lapointe y Sergei Trofimchuk, entre otros. A todo el Instituto de Matemática y Física de la Universidad de Talca por hacer de estos cuatro años una de las mejores épocas de mi vida.

A mis padres y hermanos por estar siempre ahí, con su apoyo incondicional e incentivandome a superarme en mis estudios, creo que deben ser los más orgullosos al ver lo lejos que he podido llegar. A Nicol y Elías, mis pilares en esta vida, por su amor e incondicionalidad, son mi motivación día a día para seguir en esta senda.

Por supuesto también agradecer a los profesores Julio Oliva y Moises Bravo, por darse el tiempo para ser parte de este proceso como jueces en esta tesis.

Finalmente, me gustaría agradecer a la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología CONICYT, que con la Beca Doctorado Nacional financiaron mis estudios estos cuatro años.



*A Nicol y Elías, por supuesto*



# Índice general

<b>1. Introducción</b>	<b>1</b>
<b>2. Relatividad y Agujeros Negros</b>	<b>9</b>
2.1. Ecuaciones de Einstein . . . . .	9
2.2. Formulaci3n Lagrangiana . . . . .	11
2.3. Agujeros negros Clásicos . . . . .	14
2.3.1. Soluci3n estática . . . . .	15
2.3.2. Soluci3n con carga eléctrica . . . . .	22
2.3.3. Soluci3n rotante . . . . .	24
2.3.4. Soluci3n BTZ . . . . .	26
<b>3. Termodinámica de Agujeros Negros</b>	<b>29</b>
3.1. Leyes de la Termodinámica de Agujeros Negros . . . . .	29
3.2. Vacío cuántico y Temperatura de Hawking . . . . .	30
3.3. Entropía de Wald . . . . .	33
3.4. Masa (Formalismo Cuasilocal) . . . . .	35
<b>4. Teoría de campos conforme 2-dimensional</b>	<b>39</b>
4.1. El grupo conforme . . . . .	39
4.2. Teoría de campos conforme en 2 dimensiones . . . . .	42
4.3. Tensor de energía-momento en CFT . . . . .	45
4.4. Campos primarios y cuantizaci3n radial . . . . .	46
4.5. OPE y el álgebra de Virasoro . . . . .	48
<b>5. Fórmula de Cardy</b>	<b>53</b>
5.1. Invarianza Modular . . . . .	53
5.2. Funci3n de Partici3n . . . . .	55
5.3. Derivaci3n de la fórmula de Cardy . . . . .	56
5.4. Simetrías asintóticas (Brown-Henneaux) . . . . .	58

5.5. Fórmula de Cardy para el agujero negro BTZ . . . . .	60
<b>6. Métricas anisotrópicas</b>	<b>63</b>
6.1. Correspondencia AdS/CFT no relativista . . . . .	63
6.2. Rotación de Wick . . . . .	65
6.3. Masa del Solitón y su rol en el crecimiento asintótico del número de estados	66
6.4. Teoría de campos con escalamiento anisotrópico en 1+1 dimensiones y Fórmula de Cardy . . . . .	69
<b>7. Extensión de la Fórmula de Cardy al caso de violación a la propiedad de hiperescalamiento</b>	<b>73</b>
<b>8. Extensión de la Fórmula de Cardy al caso Lifshitz cargado</b>	<b>85</b>
<b>9. Conclusión</b>	<b>99</b>

---

# Capítulo 1

## Introducción

En esta tesis estudiamos soluciones de agujeros negros y sus características, particularmente la entropía de agujeros negros que tienen un comportamiento asintótico no estandar [1, 2]. Para esto, fundamental ha sido el estudio de una rama de física con notables aplicaciones de matemática avanzada: *Termodinámica*. La Termodinámica es una herramienta analítica, teórica y práctica que interpreta fenómenos naturales desde el punto de vista de las relaciones de materia y energía. Ésta, estudia el intercambio de energía en sus diversas formas, las propiedades de la materia y el uso racional de la energía. Su objetivo es, a partir de unos cuantos postulados (leyes de la termodinámica), obtener relaciones entre propiedades macroscópicas de la materia, cuando ésta se somete a toda una variedad de procesos. Aquí, la necesidad de contar con una propiedad de estado del sistema que permita medir el grado de irreversibilidad que tiene un proceso y otras características relacionadas con el segundo principio de la termodinámica obligó a definir una serie de funciones diseñadas para tal fin. La primera de ellas fue la entropía. Podemos decir que esta es el grado de desorden y de caos que existe en la naturaleza. La importancia de la entropía reside en su propio papel en la descripción de los procesos termodinámicos reales y en el papel que juega formando parte de otras propiedades derivadas de la entropía como la energía libre, que permiten caracterizar a los sistemas reales en forma mas completa y descriptiva [3].

En el año 1973, los físicos J. Bardeen, B. Carter y S. Hawking, postularon cuatro leyes que gobiernan el comportamiento de los agujeros negros [4] y que tienen una sorprendente coincidencia con las cuatro leyes de la termodinámica de la física clásica. Aquí, por supuesto la entropía de agujeros negros juega un papel fundamental. Intuitivamente, un agujero negro podemos definirlo como una región finita del espacio-tiempo, envuelta en otra región llamada horizonte de eventos, la cual genera un campo gravitatorio tal que

---

nada, ni siquiera la luz, puede escapar. Estos objetos, en un comienzo, nacen a partir de soluciones a las ecuaciones de campo de Relatividad General (Ecuaciones de Einstein).

La teoría de la Relatividad General [5–7] fue propuesta por Albert Einstein en 1915, en ella se postula, a diferencia de las teorías científicas ya existentes, que debemos abandonar la idea de que el tiempo es absoluto, debemos aceptar que el tiempo no está completamente separado del espacio, ni es independiente de éste, sino que se combina con él para formar una entidad llamada *espacio-tiempo* [8], en éste, cualquier suceso, es decir, cualquier cosa que ocurra en un punto particular del espacio y en un instante particular del tiempo puede ser especificado mediante cuatro números o coordenadas. Entre los pilares fundamentales de esta teoría se encuentra su *principio de equivalencia*, el cual podemos enunciarlo de la siguiente manera: en regiones suficientemente pequeñas del espacio, es imposible afirmar si estamos en reposo en un campo gravitatorio o uniformemente acelerados en el espacio vacío [8]. Einstein utilizó este principio de equivalencia para crear su nueva teoría de la Relatividad General. La teoría de la relatividad considera la gravedad como manifestación de la curvatura de esta variedad espacio-tiempo, es decir, está asociada a un concepto puramente geométrico [9]. Sabemos que la fuente de esta curvatura es la materia de la cual tenemos una descripción tensorial, el tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$ . Además, esta curvatura del espacio es descrita a través del tensor de Einstein, denotado por  $G_{\mu\nu}$ . La manera en que la materia interactúa con el espacio-tiempo está dada por las ecuaciones de Einstein,  $G_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}$ , en las cuales podemos observar que el espacio dice como se mueve la materia y la materia dice como se curva el espacio. Las ecuaciones de Einstein forman un sistema de 10 ecuaciones diferenciales parciales no-lineales acopladas de segundo orden, y dada la libertad de elección de las cuatro coordenadas espaciotemporales, las ecuaciones independientes se reducen a seis. Un año después de la publicación de Einstein, el físico alemán Karl Schwarzschild encontró una solución estática, en el vacío considerando simetría esférica, pese a que Einstein creía que no se encontrarían soluciones, o en su defecto tardarían muchos años, dada la complejidad de estas. Desde ese momento decenas de soluciones de agujero negro se han encontrado: con carga electromagnética, rotantes, entre otras.

En los años donde la teoría de los agujeros negros estaba en pleno auge, principios de los 70, Jacob Bekenstein comenzó a preguntarse por ellos desde un punto de vista termodinámico. Si consideramos que todo lo que cae dentro de uno desaparece y no puede volver a salir ¿Qué ocurre con la entropía? ¿Podríamos reducir la entropía del universo lanzando cosas entrópicas al interior de un agujero negro? Esto iría en contra de las leyes de la termodinámica. Bekenstein decidió suponer que el área de un agujero negro era, de

---

hecho, una medida de su entropía, y dado que cuando lanzamos cosas a un agujero negro aumentamos su masa y su área, aumentamos su entropía. Así la termodinámica quedaba a salvo. Además supuso que esta relación entre la entropía de un agujero negro y el área de este debía involucrar a las constantes fundamentales de la naturaleza: la entropía de Bekenstein sería proporcional al área del agujero negro dividido en el área de Planck, lo que involucraría, para el caso estático, cuatro constantes fundamentales: la velocidad de la luz, la constante de Boltzmann, la constante de gravitación universal y la constante de Planck [10]. Así esta ecuación, era la primera en su tipo: tenía elementos de relatividad, termodinámica, gravitación y mecánica cuántica, todo a la vez.

El postulado de la leyes de la termodinámica [4] era reciente. A partir de esto Hawking expuso que si un agujero negro tenía energía y entropía, entonces necesariamente debía tener asociada una temperatura, lo que contraargumentaba el pensamiento de Bekenstein. Esto llevaba a un problema esencial, ya que no se puede asociar una temperatura real a un objeto cuya principal característica es no dejar escapar nada del interior de su horizonte. Considerando esta propiedad de los agujeros negros, su temperatura debía ser el cero absoluto. Tal era la situación, hasta que una conexión más profunda fue descubierta al entrar en escena la mecánica cuántica. En el año 1975, Steven Hawking postuló que si se toman en cuenta ciertos efectos cuánticos sobre un agujero negro, éste emite radiación [11]. Este inesperado resultado está relacionado al concepto de vacío cuántico, el cual se apoya en el principio de incertidumbre de Heisenberg para exponer que existen partículas virtuales que son afectadas por efectos gravitatorios sobre este vacío cuántico, causando así esta radiación. Más aún, postuló una expresión explícita para la temperatura de los agujeros negros, en la cual intervienen constantes relacionadas tanto a relatividad como a mecánica cuántica y se puede observar que esta temperatura es inversamente proporcional a la masa. Basándose en la primera ley de la termodinámica y su fórmula para la temperatura, Hawking encontró una expresión para la entropía, esta es un cuarto del área del agujero negro (Entropía de Bekenstein-Hawking). Esto vino a apoyar el postulado de Bekenstein sobre la entropía, y de paso se convirtió en uno de los resultados más importantes de la física hasta hoy en día, dando fuertes indicios de lo que hasta ese momento era solo una idea: unificar las dos teorías científicas que hasta ahora reinan en la física, la teoría de la Relatividad General y la Mecánica Cuántica. Uno de los mayores retos de la física actual es la búsqueda de una nueva teoría que las incorpore a ambas, es decir, una teoría cuántica de la gravedad. Carecemos, por ahora, de una teoría de estas características, y puede que aún estemos lejos de tenerla, pero ya conocemos propiedades que esta debería tener [8].

Al estudiar teorías gravitatorias podemos obtener información sobre teorías cuánticas

---

---

de campos fuertemente acopladas. Algunas de estas teorías están presentes en muchas aplicaciones en física, y corresponden a aquellas que son invariantes bajo el llamado grupo conforme. A este tipo de teoría se le conoce como *Teoría de campos conforme* (CFT, por su sigla en inglés). Hablar de simetría conforme, es considerar invariancia bajo cualquier transformación que preserve la forma localmente, incluyendo la invariancia de escala. La teoría del campos conforme se desarrolló fuertemente durante los años 80 y 90 [12–14], donde la teoría de campos conforme en dos dimensiones se ha utilizado para estudiar las transiciones de fase de segundo orden en sistemas bidimensionales y en la teoría de cuerdas.

Siguiendo en este contexto de CFT, J. L. Cardy [15, 16], derivó una fórmula para una densidad asintótica de estados, que ahora se conoce como *fórmula de Cardy*. Esta fórmula nos entrega la entropía de una teoría de campos conforme bidimensional y es calculada a partir de cargas centrales presentes en una teoría de campos conforme. Teniendo en cuenta esto y sabiendo que los agujeros negros se comportan como objetos termodinámicos, se hace natural querer dar una interpretación estadística de la entropía de los agujeros negros. Para esto último, uno de los resultados mas importantes para este trabajo es el proporcionado por Strominger [17], el cual se apoya en una observación impulsada por Brown y Henneaux durante la década de 1980 [18] y actualmente interpretada en términos de la correspondencia AdS/CFT [19]. Esta correspondencia fue propuesta en 1997 por el físico Juan M. Maldacena, en la cual se conjetura que una teoría gravitatoria en espacios AdS es dual a una CFT en dimensión menor. En el trabajo de Brown y Henneaux podemos apreciar que las simetrías asintóticas de Relatividad General con constante cosmológica negativa (espacio-tiempo AdS) en tres dimensiones corresponden a dos copias del álgebra de Virasoro, así una teoría cuántica de la gravedad consistente debería ser descrita en términos de una teoría de campos conforme en dos dimensiones, con una carga central dada por  $c = 3l/2G$ , donde  $G$  y  $l$  representan la constante de Newton y el radio de AdS, respectivamente. Strominger [17] utilizó la carga central de Brown y Henneaux junto a la fórmula de Cardy para demostrar que la entropía de agujero negro obtenida a través de esta última coincide con la entropía de Bekenstein-Hawking del agujero negro BTZ, un agujero negro que es asintóticamente AdS. Sin embargo, hay ejemplos conocidos para los que esta propuesta tiene que ser redefinida, ya que para ellos la carga central no juega el papel principal para reproducir la entropía semiclásica de agujeros negros a partir de un recuento microscópico. De hecho, como se explica en [20], el crecimiento asintótico del número de estados puede expresarse solo en términos del espectro de los operadores de Virasoro sin hacer ninguna referencia explícita a las cargas centrales.

En la derivación anterior de Strominger, implícitamente el estado fundamental es iden-

---

---

tificado por el espacio-tiempo AdS. La brecha existente en el espectro, dada por la energía de sistema y la energía del estado fundamental, es vital ya que nos garantiza que la función de partición es dominada por la contribución del estado fundamental, lo que nos permite obtener una fórmula precisa para el crecimiento asintótico del número de estados con una energía fija, a través de una aproximación por el método del punto de silla. Para un valor de la masa fija, a pesar de existir al menos dos configuraciones distintas de agujero negro, la fórmula de Cardy estándar solo reproduce la entropía de un agujero negro BTZ, el cual corresponde al sector vacío, ya que como se nos muestra en [20], agujeros negros en el vacío y con una configuración diferente (agujeros negros con pelo o como es en nuestro caso asociado a correcciones cuadráticas) no pueden ser deformados uno en el otro, lo cual sugiere que pertenecen a sectores distintos desconectados. Por esto, el espacio-tiempo AdS debe ser considerado como estado fundamental adecuado solo para el sector vacío, entonces podemos esperar que el otro sector posea un estado fundamental diferente tal que la fórmula de Cardy reproduzca la entropía cuando este se toma en cuenta. La resolución a este problema viene dada por el hecho de que un estado fundamental adecuado para este sector existe y está descrito por un solitón gravitacional. La importancia de éste radica que cumple con lo que se espera para un estado fundamental: es suave y regular en todas partes, como también carece de constantes de integración. Así en analogía con lo que ocurre en el vacío, el espectro de energía de los demás sectores de la teoría consiste de una parte continua acotada inferiormente por cero (agujero negro), una brecha (singularidades desnudas), y un estado fundamental con masa fija negativa dada por las constantes fundamentales de la teoría (solitón). Luego, como podemos verificar en [20, 21], la fórmula de Cardy reproduce la entropía del agujero negro exactamente de acuerdo con el resultado semiclásico.

Desde hace ya algunos años existe el interés de extender todas estas ideas relacionadas a la correspondencia relativista estándar AdS/CFT a la física no relativista con el fin de obtener una mejor comprensión de la física de materia condensada, particularmente de sistemas físicos que exhiben invariancia bajo una simetría de reescalamiento con diferentes pesos entre el espacio y el tiempo (escalamiento anisotrópico). A través de esta, la gravedad dual de estos sistemas corresponde a los llamados *espacio-tiempos de Lifshitz* [22]. El responsable de la anisotropía del sistema es un parámetro conocido como exponente dinámico, denotado por  $z$ , donde el caso  $z = 1$  corresponde al espacio-tiempo AdS. Soluciones a ecuaciones de movimiento asintóticamente Lifshitz son conocidos como agujeros negros tipo Lifshitz. Si consideramos  $z \neq 1$  esta métrica de Lifshitz no es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, y en su lugar requiere la introducción de alguna fuente de materia o considerar términos de curvatura de orden superior [22].

---

Uno de los resultados más importantes estudiado en esta tesis considerando teorías de campo con escalamiento anisotrópico fue encontrado el año 2011 en [23]. En él, los autores muestran que la entropía semiclásica de agujeros negros asintóticamente Lifshitz puede ser obtenida a través del crecimiento asintótico del número de estados de una teoría de campos con escalamiento Lifshitz en dos dimensiones, donde el estado fundamental corresponde a un solitón. Además, existe una dualidad entre alta y baja temperatura que surge naturalmente como consecuencia de que las álgebras Lifshitz bidimensionales con exponentes dinámicos  $z$  y  $z^{-1}$  son isomorfos. La fórmula obtenida se conoce como fórmula de Cardy anisotrópica y depende del exponente dinámico  $z$ , y de la energía del estado fundamental. Esta se reduce a la fórmula Cardy para  $z = 1$ .

Siguiendo en este mismo contexto, existen teorías dotadas de lo conoce como un *hiperesclamamiento*. En este tipo de teorías la energía libre escala como su dimensionalidad espacial. Ésto se ve reflejado en el hecho de que la entropía escala como la temperatura elevada a la dimensionalidad espacial [24]. En el caso de Lifshitz este hiperescalamiento esta dado por  $S \sim T^{\frac{d-2}{z}}$ , donde  $d - 2$  es la dimensionalidad espacial y  $z$  es el exponente dinámico que refleja la simetría anisotrópica del sistema. Si estudiamos ahora las llamadas transiciones de fase cuánticas, las cuales son transiciones que se producen entre dos fases diferentes a temperatura cero, el sistema muestra una violación a este hiperescalamiento que se refleja en el hecho de que la entropía varía con respecto a la temperatura  $T$  como  $S \sim T^{\frac{d_{\text{eff}}}{z}}$ . La constante  $z$  es el exponente dinámico y  $d_{\text{eff}}$  se llama dimensionalidad espacial efectiva. Estos sistemas son descritos por la *métrica de violación al hiperescalamiento*, en la cual están los parámetros  $z$  y  $\theta$ , este último se denomina exponente de violación al hiperescalamiento, y para el caso  $\theta = 0$  se reduce a la métrica de Lifshitz. Cabe destacar que acá  $d_{\text{eff}}$  depende explícitamente de  $\theta$ , y que para cada teoría gravitatoria de orden superior a considerar, la dimensionalidad espacial efectiva cambia.

Una vez conocido todo esto, es natural querer extender la fórmula de Cardy anisotrópica, definida en el espacio-tiempo de Lifshitz, a un espacio-tiempo mas general. Éste fue nuestro primer resultado, una fórmula de Cardy anisotrópica en espacio-tiempo de violación al hiperescalamiento en tres dimensiones [1]. En este espacio sabemos que el escalamiento de la entropía en términos de la temperatura (definida como la dimensionalidad espacial efectiva dividida por el exponente dinámico) depende explícitamente de la teoría de gravedad. Al considerar teorías gravitatorias de orden superior, como se explicó anteriormente, el solitón gravitacional juega un papel principal, ya que es identificado como el estado fundamental. La brecha existente en el espectro, delimitada por la masa de un agujero negro y la masa del solitón, es de gran importancia para existencia de nuestra

---

fórmula para la entropía, por ello cabe destacar que el formalismo cuasilocal está bien adaptado para determinar principalmente la masa de solitón, ya que este último carece de constantes de integración.

Nuestro segundo resultado nace al considerar una nueva configuración de agujeros negros, esta vez agujeros negros con carga electromagnética [2], por lo que nuevamente el solitón gravitacional es de vital importancia. Para este tipo de configuraciones el solitón sin carga es apropiado como estado fundamental. En este contexto, sabemos que existen soluciones de agujero negro con masa nula, pero con entropía distinta de cero, ya que por supuesto hay otras cargas Noetherianas interactuando en la primera ley de la termodinámica. El problema surge por el hecho de que el valor de la masa sea cero, ya que entonces la masa del solitón será nula también, careciendo aparentemente de una brecha en el espectro de la energía, y por lo tanto no pudiendo aproximar nuestra densidad de estados por el método del punto de silla. La solución a esto viene dado al considerar solitones gravitacionales cargados, en nuestro caso magnéticamente. Ésto le da vida a nueva brecha en el espectro, pudiendo ahora identificar como estado fundamental el solitón con carga. Una vez resuelto esto, una extensión de la fórmula de Cardy nace para agujeros negros tipo Lifshitz cargados electromagnéticamente satisfaciendo también una relación de Smarr. A partir de esto, también obtuvimos una fórmula de Cardy para la entropía de agujeros negros con violación al hiperescalamiento cargados con carga eléctrica.

Con el fin de explicar a cabalidad y de manera mas profunda cada uno de los temas tratados hasta ahora, esta tesis se organiza de la siguiente forma: En el capítulo 2 se exponen la ideas principales de la relatividad general, y examinamos soluciones clásicas de agujeros negros. El capítulo 3 hace referencia a la termodinámica de agujeros negros. Aquí presentamos aspectos fundamentales de esta, como las leyes de la termodinámica de agujeros negros, y estudiamos los parámetros termodinámicos que son importantes para esta tesis, estos son los conceptos de temperatura, entropía y masa. Un repaso de teoría de campos conforme es tratado en el capítulo 4. En el capítulo 5, estudiamos una CFT 2-dimensional sobre un toro. Examinaremos su invarianza modular y definiremos una función de partición, que juntos nos permitirán derivar la fórmula de Cardy de manera explícita. La derivación de una fórmula para la entropía de agujeros negros tipo Lifshitz 3-dimensionales es estudiada en el capítulo 6, a través del estudio de una teoría de campos (1+1)-dimensional, destacando la importancia de rotaciones y solitones gravitacionales vistos como un estado fundamental. También se presentan los espacio-tiempos de Lifshitz y con violación al hiperescalamiento, como espacios duales a sistemas físicos que presentan un escalamiento anisotrópico, a través de una extensión de la correspondencia AdS/CFT.

---

Tanto los resultados finales de la tesis, como los artículos publicados donde estos se exponen son presentados en los capítulos 7 y 8. En el primero de estos, se muestra la extensión de esta fórmula de Cardy anisotrópica al espacio-tiempo de violación al hiperscalamiento. Luego en el capítulo siguiente se expone otra extensión de esta fórmula pero ahora para el caso de agujeros negros cargados electromagnéticamente, asociados a una fórmula de Smarr, para los espacios tipo Lifshitz y su generalización a la métrica de violación al hiperscalamiento. Por último en el capítulo 9 se han agregado conclusiones y comentarios de los puntos más importantes de esta tesis.

## Capítulo 2

# Relatividad y Agujeros Negros

A modo de mostrar ciertos preliminares, en este capítulo estudiaremos las ecuaciones de Einstein, que son el símbolo del formalismo matemático que hay detrás de la teoría. Se expone el formalismo lagrangiano y se utiliza para obtener ecuaciones de movimiento en teorías conocidas. Soluciones de agujeros negros clásicas son presentadas como solución a las ecuaciones de Einstein, entre ellas las solución BTZ muy estudiada estas últimas décadas.

### 2.1. Ecuaciones de Einstein

A modo de introducción a relatividad general y las ecuaciones de campo, nos conviene analizar la interacción entre gravedad y materia.

Podemos asociar la gravedad a un concepto puramente geométrico: Por principio de equivalencia, esta es una manifestación de la curvatura del espacio, es decir, una propiedad geométrica del espacio-tiempo. Por otro lado, también sabemos que la fuente que induce esta curvatura es la materia. Para estudiar como la gravedad interactúa con la materia están las ecuaciones de Einstein, estas forman parte de la teoría de la Relatividad General propuesta por el físico Albert Einstein en 1915, están dadas por:

$$G_{\mu\nu} + \Lambda g_{\mu\nu} = \kappa T_{\mu\nu}. \quad (2.1.1)$$

Aquí,  $g_{\mu\nu}$  es el tensor métrico,  $G_{\mu\nu}$  representa el tensor de Einstein,  $\Lambda$  es la constante cosmológica,  $\kappa := 8\pi G$  es una constante y  $T_{\mu\nu}$  el tensor de energía-momento.

El tensor métrico  $g_{\mu\nu}$  representa el campo gravitacional en las ecuaciones de Einstein (2.1.1), es un  $(0, 2)$ -tensor, simétrico y no degenerado (determinante de la métrica  $g_{\mu\nu} := |g|$

no nulo). Este es definido para las coordenadas  $x^\mu$  por el elemento de línea

$$ds^2 = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (2.1.2)$$

de manera tal que contiene toda información acerca de la geometría del espacio-tiempo. A partir de esto, podemos definir la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  como

$$g^{\mu\nu} g_{\mu\sigma} = g_{\tau\sigma} g^{\tau\mu} = \delta_\sigma^\mu, \quad (2.1.3)$$

la cual es simétrica por definición.

El tensor de Einstein  $G_{\mu\nu}$  es usado para expresar la curvatura de espacio-tiempo y es definido como

$$G_{\mu\nu} := R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu}. \quad (2.1.4)$$

Para esta última definición, si consideramos el tensor de Riemann (o simplemente tensor de curvatura)  $R^\rho_{\sigma\mu\nu}$ , el cual cuantifica la curvatura, es antisimétrico en los últimos dos índices y está definido por

$$R^\rho_{\sigma\mu\nu} = \partial_\mu \Gamma^\rho_{\nu\sigma} - \partial_\nu \Gamma^\rho_{\mu\sigma} + \Gamma^\rho_{\mu\lambda} \Gamma^\lambda_{\nu\sigma} - \Gamma^\rho_{\nu\lambda} \Gamma^\lambda_{\mu\sigma}, \quad (2.1.5)$$

podemos obtener el tensor de Ricci  $R_{\mu\nu}$ , el cual es simétrico y es definido por contracción del tensor de curvatura, y la curvatura escalar  $R$  (o escalar de Ricci) definido por contraer el tensor de Ricci con la métrica:

$$R_{\mu\nu} = R^\lambda_{\mu\lambda\nu}, \quad R = g^{\mu\nu} R_{\mu\nu}. \quad (2.1.6)$$

En la ecuación (2.1.5),  $\Gamma^\rho_{\mu\nu}$  es la conexión afín, llamados símbolos de Christoffel y están dados por:

$$\Gamma^\rho_{\mu\nu} = \frac{1}{2} g^{\sigma\rho} (\partial_\mu g_{\nu\sigma} + \partial_\nu g_{\rho\mu} - \partial_\rho g_{\mu\nu}). \quad (2.1.7)$$

El tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  describe la distribución de materia en cada punto del espacio-tiempo y puede ser determinado diferenciando la acción  $S$  con respecto a la métrica

$$T_{\mu\nu} = \frac{2}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.1.8)$$

para el cual la ley de conservación de la energía nos dice que  $\nabla_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

Las ecuaciones de Einstein representan las ecuaciones de movimiento del campo gravitatorio y forman la base matemática de la Teoría de la Relatividad General.

---

## 2.2. Formulación Lagrangiana

Una de las formas de obtener las ecuaciones de Einstein, y en general las ecuaciones de movimiento de un sistema físico, es a través del *principio de mínima acción*: buscamos puntos críticos de una acción  $S$  [9]. Considerando teoría de campos en la cual las variables son un conjunto de campos  $\Phi^i(x)$ , la acción  $S$  es expresada como una integral sobre el espacio de densidad de Lagrange  $\mathcal{L}$  :

$$S = \int \mathcal{L}(\Phi^i, \nabla_\mu \Phi^i) d^D x. \quad (2.2.1)$$

donde  $\nabla_\mu \Phi^i$  es la derivada covariante del campo  $\Phi^i$  y  $D$  es la dimensión del espacio-tiempo. El Lagrangiano es el operador fundamental para describir un sistema físico, en (2.2.1) está representando por  $\mathcal{L}$ . Comúnmente escribimos

$$\mathcal{L} = \sqrt{-g} \hat{\mathcal{L}}. \quad (2.2.2)$$

donde  $\hat{\mathcal{L}}$  es un escalar. Si exigimos que la acción sea estacionaria con respecto a las variaciones de los campos,  $\delta\phi^i$  y  $\delta\nabla_\mu \Phi^i$ , anulándose en la frontera, podemos obtener las ecuaciones de movimiento usando (2.2.2) y variando la acción. La variación de la acción (2.2.1) es:

$$\delta S = \int \sqrt{-g} \left[ \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \Phi^i} \delta\phi^i + \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \nabla_\mu \Phi^i} \delta \nabla_\mu \Phi^i \right] d^D x. \quad (2.2.3)$$

Integrando por partes el segundo término de la ecuación anterior y usando la condición de variación de los campos en el borde, obtenemos la ecuaciones de movimiento para nuestra teoría

$$\frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\delta \Phi^i} = \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial \Phi^i} - \nabla_\mu \left( \frac{\partial \hat{\mathcal{L}}}{\partial (\nabla_\mu \Phi^i)} \right) = 0 \quad (2.2.4)$$

éstas se conocen como las *ecuaciones de Euler-Lagrange* y son las condiciones bajo las cuales nuestro problema de variaciones alcanza un extremo.

Notar que en particular si el campo  $\Phi^i$  lo asociamos a la métrica  $g_{\mu\nu}$ , el tensor de energía momento  $T_{\mu\nu}$  lo podemos obtener variando el Lagrangiano con respecto a esta, tal como en la ecuación (2.1.8). Como ejemplo, aplicaremos lo anterior a tres campos  $\Phi^i$  distintos: a un caso clásico que es cuando tenemos un campo escalar y otros dos ejemplos, que entre otros, utilizaremos en esta tesis, el primero para teoría de campo en electromagnetismo y en el segundo derivaremos las ecuaciones de Einstein.

Si tenemos primero que nuestro campo es un campo escalar,  $\Phi^1 := \Phi(r)$ , y consideramos la acción

$$S_\Phi = \int \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{2} g^{\mu\nu} \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi + V(\Phi) \right] d^D x, \quad (2.2.5)$$

donde  $V(\Phi)$  representa un potencial, el tensor de energía momento viene dado por:

$$T_{\mu\nu}^\Phi = \nabla_\mu \Phi \nabla_\nu \Phi - \frac{1}{2} g_{\mu\nu} \nabla_\sigma \Phi \nabla^\sigma \Phi - g_{\mu\nu} V(\Phi). \quad (2.2.6)$$

Utilizando (2.2.4) y considerando  $\square\Phi = \nabla_\mu \nabla^\mu \Phi = g^{\mu\nu} \nabla_\mu \nabla_\nu \Phi$ , las ecuaciones de Euler-Lagrange son

$$\square\Phi - \frac{dV(\Phi)}{d\Phi} = 0. \quad (2.2.7)$$

Un campo importante para una teoría de campo provista de electromagnetismo es el vector potencial  $A_\mu$ , en el cual su componente temporal  $A_t$  puede ser identificado con un potencial electrostático. El campo de fuerza del campo de Maxwell esta representado por el tensor

$$F_{\mu\nu} = \partial_\mu A_\nu - \partial_\nu A_\mu. \quad (2.2.8)$$

En relación a esta última ecuación, cuando el campo dinámico de la teoría (con respecto a la cual variamos la acción para derivar las ecuaciones de movimiento) es  $A_\mu$ , cantidades físicas generalmente son expresadas en terminos de  $F_{\mu\nu}$  [9].

Notar que al considerar nuestro campo  $\Phi^2 := A_\mu$  las ecuaciones de Euler-Lagrange tienen la forma

$$\frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial A_\nu} - \partial_\mu \left( \frac{\partial \widehat{\mathcal{L}}}{\partial (\partial_\mu A_\nu)} \right) = 0 \quad (2.2.9)$$

Si consideramos el Lagrangiano de Maxwell, la acción esta dada por:

$$S_M = \int \sqrt{-g} \left[ -\frac{1}{4} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu} \right] d^D x. \quad (2.2.10)$$

Variando la acción anterior (2.2.10) con respecto a la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$  y utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange asociadas (2.2.9), respectivamente obtenemos la ecuaciones de movimiento

$$T_{\mu\nu}^M = F_{\mu\sigma} F_\nu^\sigma - \frac{1}{4} g_{\mu\nu} F_{\alpha\beta} F^{\alpha\beta}, \quad (2.2.11)$$

$$\partial_\mu F^{\mu\nu} = 0. \quad (2.2.12)$$

Ahora, consideraremos la acción de Einstein-Hilbert, la que nos proporcionará las ecuaciones de Einstein en el vacío, a través del principio de mínima acción. Esta acción está dada por:

$$S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} R d^D x. \quad (2.2.13)$$

Para considerar variaciones con respecto a la métrica es conveniente para nosotros variar con respecto a la métrica inversa  $g^{\mu\nu}$ . Tomando en cuenta que  $g^{\mu\lambda} g_{\lambda\nu} = \delta_\nu^\mu$ , podemos expresar las variaciones de la métrica y la métrica inversa una en términos de la otra:

$$\delta g_{\mu\nu} = -g_{\mu\rho} g_{\nu\sigma} \delta g^{\rho\sigma}. \quad (2.2.14)$$

Usando la definición de la curvatura escalar (2.1.6), tenemos que la variación de la acción es:

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \left[ (\delta S_{EH})_1 + (\delta S_{EH})_2 + (\delta S_{EH})_3 \right], \quad (2.2.15)$$

donde

$$(\delta S_{EH})_1 = \int d^D x \sqrt{-g} g^{\mu\nu} \delta(R_{\mu\nu}), \quad (2.2.16)$$

$$(\delta S_{EH})_2 = \int d^D x \sqrt{-g} R_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}), \quad (2.2.17)$$

$$(\delta S_{EH})_3 = \int d^D x R \delta(\sqrt{-g}). \quad (2.2.18)$$

Notar que que en caso del segundo término  $(\delta S_{EH})_2$ , ya está la expresión multiplicada por  $\delta(g^{\mu\nu})$ .

Para el primer término  $(\delta S_{EH})_1$ , usamos la variación del tensor de Riemann para obtener la variación del tensor de Ricci  $\delta(R_{\mu\nu})$  por medio de una operación de contracción:

$$\delta(R_{\mu\nu}) = \delta(R^\rho{}_{\mu\rho\nu}) = \nabla_\rho(\delta\Gamma^\rho{}_{\nu\mu}) - \nabla_\nu(\delta\Gamma^\rho{}_{\rho\mu})$$

Reemplazando en (2.2.16), usando la compatibilidad de la métrica y reetiquetando algunos índices mudos tenemos que

$$(\delta S_{EH})_1 = \int d^D x \sqrt{-g} \nabla_\sigma [g_{\mu\nu} \nabla^\sigma (\delta g^{\mu\nu}) - \nabla_\lambda (\delta g^{\sigma\lambda})]. \quad (2.2.19)$$

Notar que la última integral (2.2.19), se puede ver como la divergencia de un vector, lo que nos lleva por el teorema de Stokes a que es igual a un término de frontera, el cual es cero haciendo que la variación se desvanezca al infinito.

Por otro lado para el tercer término  $(\delta S_{EH})_3$ , tenemos

$$\delta(\sqrt{-g}) = -\frac{1}{2}\sqrt{-g} g_{\mu\nu} \delta(g^{\mu\nu}), \quad (2.2.20)$$

por lo tanto nuestra integral (2.2.18) es de la forma

$$(\delta S_{EH})_3 = \int d^D x \sqrt{-g} \left( -\frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.2.21)$$

Así que, volviendo a (2.2.15), recordando que  $(\delta S_{EH})_3$  no contribuye y complementando con (2.2.19) y (2.2.21), llegamos a

$$\delta S_{EH} = \frac{1}{2\kappa} \int d^D x \sqrt{-g} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) \delta g^{\mu\nu}. \quad (2.2.22)$$

esto nos ayuda a recuperar las ecuaciones de Einstein en el vacío, de la forma

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{EH}}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\kappa} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) = 0. \quad (2.2.23)$$

Unificando lo que hemos visto, si consideramos una acción más general  $S$  de la forma

$$S = S_{grav} + S_{mat}, \quad (2.2.24)$$

donde  $S_{grav}$  lo asociamos a una acción de gravedad, como (2.2.13), y a  $S_{mat}$  a una acción para la materia (de la cual podemos obtener  $T_{\mu\nu}$ ), tal como (2.2.5) y (2.2.10).

Finalmente, notemos que al considerar

$$\frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S}{\delta g^{\mu\nu}} = \frac{1}{2\kappa} \left( R_{\mu\nu} - \frac{1}{2} R g_{\mu\nu} \right) + \frac{1}{\sqrt{-g}} \frac{\delta S_{mat}}{\delta g^{\mu\nu}}, \quad (2.2.25)$$

y definiendo el tensor de energía momento como en (2.1.8), tenemos nuestras ecuaciones de Einstein (sin constante cosmológica  $\Lambda$ ).

Como observación, si al lagrangiano en la acción de Einstein.Hilbert (2.2.13) agregamos esta constante  $\Lambda$

$$S_{EH,\Lambda} = \frac{1}{2\kappa} \int \sqrt{-g} (R - 2\Lambda) d^D x, \quad (2.2.26)$$

usando las ecuaciones (2.2.20), (2.2.24) y (2.2.25) obtenemos las ecuaciones de Einstein (2.1.1).

## 2.3. Agujeros negros Clásicos

Una de las aplicaciones más exitosas y maravillosas de la relatividad general es la teoría matemática de agujeros negros. Albert Einstein creía que sus ecuaciones eran de una complejidad tal que nunca se encontraría una solución exacta de ellas, sin embargo

en estos últimos cien años se han encontrado decenas. En esta sección exploraremos tres soluciones exactas y clásicas de las ecuaciones de Einstein que describen agujeros negros, estas son las soluciones de Schwarzschild, Reissner-Nordström y la de Kerr, donde cada una de ellas representan agujeros negros estáticos de simetría esférica en el vacío, cargados eléctricamente y con momento angular respectivamente. El concepto de estático, de forma intuitiva, se refiere a que no hay una evolución con respecto al tiempo, existiendo un sistema de coordenadas tal que la métrica es independiente de la coordenada temporal.

### 2.3.1. Solución estática

Cuando Einstein encontró su ecuación, en el año 1915, no esperaba que se pudiera resolver con exactitud. Fue el físico y astrónomo alemán Karl Schwarzschild, en 1916, quien descubrió una solución exacta. Él consideró un campo gravitatorio esféricamente simétrico, que es la aplicación más obvia de una teoría de la gravedad, además de ser una situación muy relevante a describir, por ejemplo, el campo creado por la Tierra o el Sol (a una buena aproximación), en el que las manzanas caen o se mueven los planetas. La descripción de Schwarzschild de la métrica que resuelve las ecuaciones de Einstein, en coordenadas esféricas  $(t, r, \theta, \phi)$  está dado por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.1)$$

donde  $d\Omega^2$  es la métrica sobre una dos-esfera unitaria  $S^2$

$$d\Omega^2 = d\theta^2 + \sin^2 \theta d\phi^2. \quad (2.3.2)$$

Cabe destacar que  $M$  es una constante que corresponde a la masa del agujero negro, además que debido a su gran cantidad de simetrías, (2.3.1) es la solución no trivial más sencilla.

Si queremos entender la geometría de un espacio-tiempo debemos explorar su estructura causal. Si consideramos curvas radiales nulas para las cuales  $\theta$  y  $\phi$  son constantes y  $ds^2 = 0$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1} dr^2, \quad (2.3.3)$$

aquí podemos observar que

$$\frac{dt}{dr} = \pm \left(1 - \frac{2GM}{r}\right)^{-1}, \quad (2.3.4)$$

lo cual mide la inclinación de conos de luz en un diagrama de espacio-tiempo del plano  $t - r$ . Para valores suficientemente grandes de  $r$  la inclinación es  $\pm 1$ , como lo sería en un espacio plano. Sin embargo, si aproximamos  $r$  hacia  $2GM$  tenemos que  $\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm\infty$ , lo

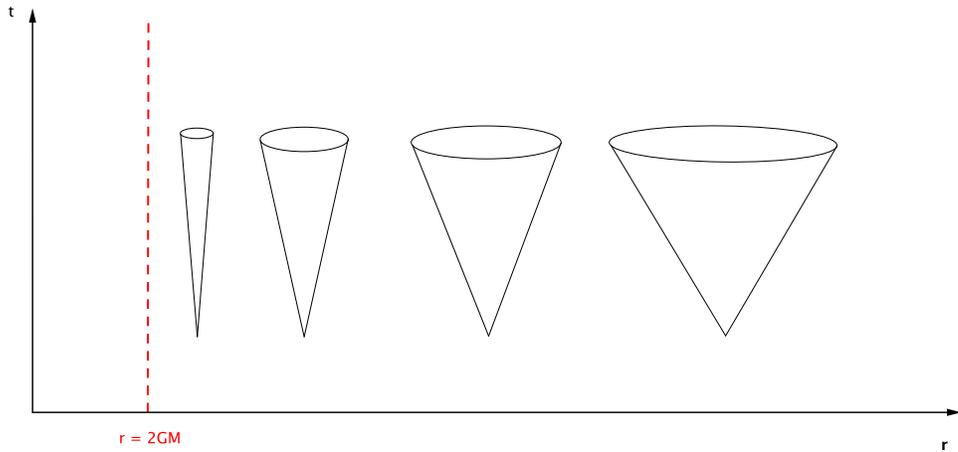


Figura 2.1: Conos de luz cerrándose a medida que se acercan a  $r = 2GM$ .

que se interpreta como conos luz cerrándose, como muestra la figura 2.1. Podemos darnos cuenta también que en este sistema de coordenadas, si los rayos de luz se acercan a la superficie  $r = 2GM$  estos nunca lo alcanzan.

El hecho de que  $\frac{dt}{dr} \rightarrow \pm\infty$  a lo largo de la geodésica que se aproxima a  $r = 2GM$ , en nuestras coordenadas corrientes representa un problema, avanzar en la dirección de  $r$  se vuelve más y más lento con respecto a la coordenada temporal  $t$ . Podemos tratar de solucionar este problema mediante la sustitución de  $t$  con una coordenada que se mueve más lentamente a lo largo de geodésicas nulas. Encontrando una solución explícita de la condición(2.3.3) que caracteriza una curva radial nula, obtenemos

$$t = \pm r^* + \text{constante}, \quad (2.3.5)$$

donde la *coordenada tortuga*  $r^*$  es definida por

$$r^* = r + 2GM \ln \left| \frac{r}{2GM} - 1 \right|. \quad (2.3.6)$$

Si miramos ahora la métrica de Schwarzschild en términos de las coordenadas tortuga, esta viene dada por

$$ds^2 = \left(1 - \frac{2GM}{r}\right) (-dt^2 + dr^{*2}) + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3.7)$$

Notar que la coordenada tortuga se encuentra  $-\infty < r^* < \infty$ , ya que  $r$  toma valores  $r > 2GM$ . Además  $r$  se considera como una función de  $r^*$ , esto representa una ventaja,

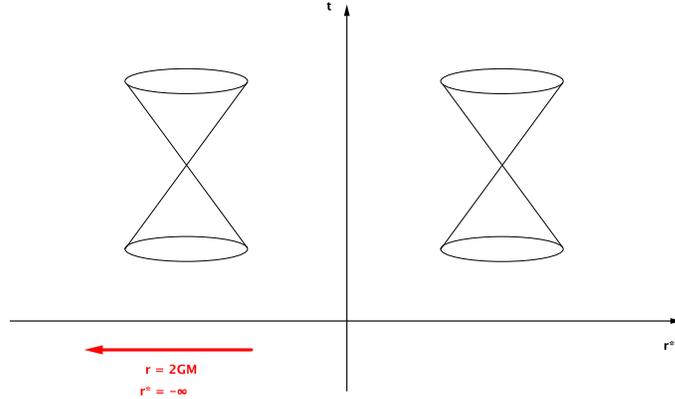


Figura 2.2: Conos de luz de Schwarzschild en coordenada tortuga

ya que ahora no aparecen los conos de luz cerrándose, como se muestra en la figura 2.2, mas aún, ninguno de los coeficientes de la métrica se hace infinita en  $r = 2GM$ . El precio que pagamos, sin embargo, es que la superficie que nos interesa  $r = 2GM$  acaba de ser empujado hasta el infinito.

Con estas nuevas coordenadas, el siguiente paso es hacer unas modificaciones para estudiar más a fondo la región  $r \leq 2GM$ . Si definimos

$$v = t + r^*, \tag{2.3.8}$$

donde  $v$  tomará valores  $-\infty < v < \infty$ , a las coordenadas  $(v, r, \theta, \phi)$  se les conoce como *coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes*. Notar que ahora el elemento de línea para la métrica de Schwarzschild (2.3.1) esta dado por

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{2GM}\right)dv^2 + 2dvdr + r^2d\Omega^2. \tag{2.3.9}$$

Observemos que bajo este cambio de coordenadas, la superficie  $r = 2GM$  no es singular y además la métrica inversa existe para este punto, ya que el determinante de la métrica  $g = -r^4 \sin^2 \theta$  no se anula en él. Por esta razón, podemos afirmar que las coordenadas originales  $(t, r, \theta, \phi)$  no son buenas para cubrir toda la variedad, mientras que las nuevas coordenadas  $(v, r, \theta, \phi)$  permiten observar que al disminuir  $r$  a lo largo de una trayectoria radial nula no existe ningun problema al cruzar el punto  $r = 2GM$ , por lo que esta región puede ser incluida dentro del espacio-tiempo. Se dice entonces que es posible continuar analíticamente la coordenada radial para tomar valores en todo el rango  $r > 0$ . Si consideramos ahora geodésicas radiales nulas para obtener la pendiente de los conos de

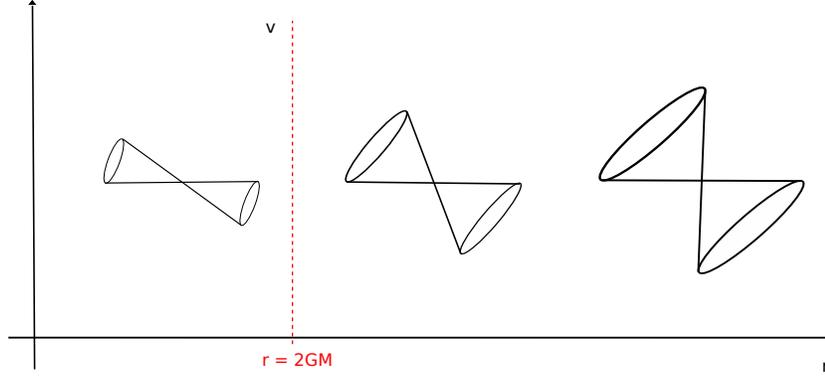


Figura 2.3: En coordenadas  $(v, r)$  (2.3.10), conos de luz cercanos a la superficie  $r = 2GM$ .

luz

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{1 - \frac{2GM}{r}} \end{cases}$$

Aquí podemos deducir que aún cuando los conos de luz no se cierran, podemos observar que se inclinan hacia adentro, tal como se muestra en la Figura 2.3. Esto hace que ninguna trayectoria tipo luz o tipo tiempo dirigida al futuro puede alcanzar  $r > 2GM$  comenzando en  $r \leq 2GM$ . Para ver esto, debemos notar que para  $r \leq 2GM$  y considerando (2.3.9), tenemos que

$$2dvdr = - \left[ -ds^2 - \left(1 - \frac{1}{2GM}\right)dv^2 + r^2d\Omega^2 \right], \quad (2.3.10)$$

pero, para trayectorias tipo luz o tipo tiempo tenemos  $ds^2 \leq 0$ , y por lo tanto

$$2dvdr \leq 0. \quad (2.3.11)$$

Debemos tomar en cuenta que por la definición de la coordenada  $v$ , para las trayectorias dirigidas al futuro tenemos que  $dv > 0$ , y así para satisfacer (2.3.11) debemos tener  $dr \leq 0$  (es decir, la trayectoria se dirige a  $r = 0$ ). La igualdad se consigue únicamente para trayectorias nulas con  $r = 2GM$  y  $d\Omega = 0$ , es decir geodesicas radiales nulas en  $r = 2GM$ . La superficie  $r = 2GM$  actúa entonces como un punto de no retorno, ya que toda partícula que entre a esta superficie no puede volver a salir. A este objeto, en el cual es imposible ver dentro de él, se le denomina usualmente *agujero negro* y a su superficie, en la cual ningún evento que ocurra dentro puede afectar la región exterior, se le llama *horizonte de eventos*.

La existencia del horizonte de eventos deja ver una posible asimetría temporal en la solución de Schwarzschild ya que trayectorias dirigidas al futuro pueden cruzar la superficie  $r = 2GM$ , mientras que las dirigidas al pasado no pueden [25]. Por esta razón consideramos

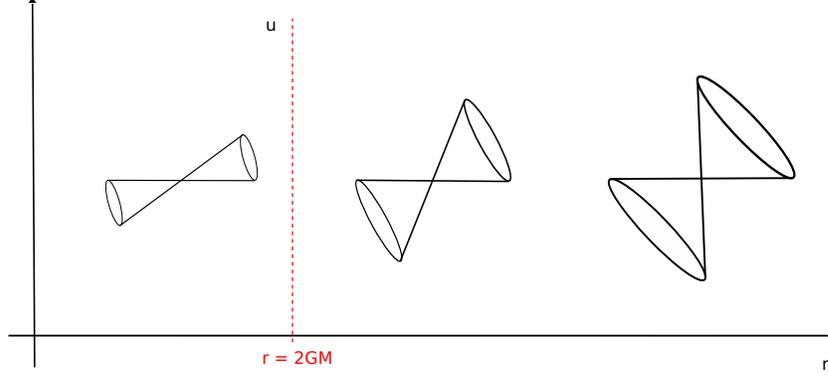


Figura 2.4: En coordenadas  $(u, r)$  (2.3.13), conos de luz cercanos a la superficie  $r = 2GM$ .

nuevamente geodésicas radiales nulas para definir otra coordenada nula de interés

$$u = t - r^*, \quad (2.3.12)$$

la cual también toma valores  $-\infty < u < \infty$ . Las coordenadas  $(u, t, \theta, \phi)$  se conocen como *coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes*, y en estas coordenadas el elemento de línea para la métrica es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{2GM}\right) du^2 - 2dvdr + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3.13)$$

Al igual que en el caso anterior, la superficie  $r = 2GM$  es no singular, y el inverso del tensor métrico existe para este punto, por lo que podemos realizar otra vez una continuación analítica para todo el rango  $r > 0$ . Pero, ahora la región interna  $r < 2GM$  no es la misma que la analizada anteriormente. Veamos esto en profundidad examinando su estructura causal. Así para estas coordenadas la geodésicas nulas satisfacen

$$\frac{dv}{dr} = \begin{cases} 0 \\ \frac{2}{1 - \frac{2GM}{r}} \end{cases}$$

Como podemos ver en la figura 2.4, para estas coordenadas los conos de luz se inclinan hacia afuera, es decir, que en este caso es posible cruzar el horizonte, pero solamente siguiendo trayectorias dirigidas al pasado, por lo que ninguna trayectoria tipo luz o tipo tiempo dirigida al futuro puede alcanzar  $r < 2GM$  comenzando en  $r \geq 2GM$ . Para  $r \leq 2GM$  tenemos

$$2dvdr \geq 0. \quad (2.3.14)$$

Si consideramos la definición de la coordenada  $u$  en (2.3.12), las trayectorias dirigidas al futuro tienen  $du > 0$ , y para satisfacer (2.3.14), debemos tener  $dr \geq 0$ . Esto quiere decir que cualquier partícula en la región  $r < 2M$  inevitablemente se dirige a la región exterior. A este tipo de objeto se le denomina *agujero blanco*, y puede ser considerado como el

inverso temporal de un agujero negro.

Siguiendo con el análisis de la solución de Schwarzschild, analizaremos ahora sistemas de coordenadas que cubren todas las regiones de esta solución. Ya que nuestra región inicial  $r > 2GM$  se cubre tanto con las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes como salientes, podemos escribir la métrica de Schwarzschild en las coordenadas  $(u, v, \theta, \phi)$

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{1}{2GM}\right) dudv + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3.15)$$

donde la coordenada  $r$  esta definida implícitamente por  $u$  y  $v$  mediante

$$\frac{1}{2}(v - u) = r + 2GM \ln \left| 1 - \frac{r}{2GM} \right|. \quad (2.3.16)$$

Ahora, la superficie  $r = 2GM$  esta de nuevo a una distancia infinita, ya que de acuerdo a esta última ecuación (2.3.16) tenemos que  $v = -\infty$  ó en  $u = \infty$ . Por esta razón realizaremos un cambio de coordenadas que traiga esta superficie a una distancia finita. Uno de los posibles cambios son la llamadas *coordenadas de Kruskal*

$$\begin{aligned} V &= e^{v/4GM} \\ U &= e^{-u/4GM} \end{aligned} \quad (2.3.17)$$

o tambien, escritas en términos de las coordenadas originales

$$\begin{aligned} V &= \left(\frac{r - 2GM}{2GM}\right)^{\frac{1}{2}} e^{(r+t)/4GM} \\ U &= \left(\frac{r - 2GM}{2GM}\right)^{\frac{1}{2}} e^{(r-t)/4GM}. \end{aligned} \quad (2.3.18)$$

Notar que términos de las coordenadas  $(V, U, \theta, \phi)$  el elemento de línea para la métrica de Schwarzschild es

$$ds^2 = -\frac{32 G^3 M^3}{r} e^{-r/2GM} dU dV + r^2 d\Omega^2. \quad (2.3.19)$$

donde la coordenada  $r$  queda definida por

$$UV = -\left(\frac{r}{2GM} - 1\right) e^{r/2GM}. \quad (2.3.20)$$

Considerando la definición de las coordenadas de Kruskal, la métrica inicial en la cual  $r > 2GM$  es la responsable de que el rango de las nuevas coordenadas sean  $U < 0$  y  $V > 0$ . Si analizamos (2.3.19), no existe ningún problema en  $r = 2GM$ , y por lo tanto podemos extenderlas para incluir las regiones  $U > 0$  y  $V < 0$ . De esta forma, nos es posible realizar un diagrama de este espacio-tiempo, donde  $U$  y  $V$  serán dibujadas a un ángulo de  $45^\circ$ , esto solo es a conveniencia ya que estas son coordenadas nulas (geodésicas radiales nulas entrantes o salientes). Utilizando la ecuación (2.3.20) podemos observar que las curvas con  $r$  constante corresponden a las hipérbolas  $VU = constante$ , la superficie  $r = 2GM$

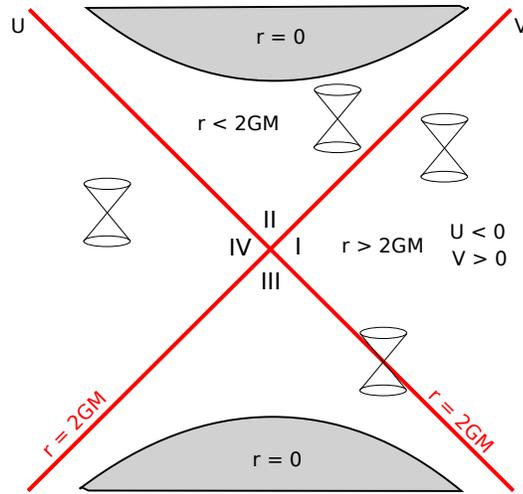


Figura 2.5: Diagrama de Kruskal.

corresponde al conjunto  $UV = 0$ , es decir  $\{U = 0\} \cup \{V = 0\}$ , y que la singularidad  $r = 0$  corresponde a las hipérbolas  $UV = 1$ , como se puede apreciar en la figura 2.5. Además, por simplicidad, se han suprimido las coordenadas  $\theta$  y  $\phi$ , por lo que cada punto de la figura 2.5 es en realidad una 2-esfera. Este diagrama también posee cuatro regiones. La región I corresponde a la variedad de Schwarzschild inicial ( $r > 2GM$ ), ya que corresponde a  $U < 0$  y  $V > 0$ . La región II nace al extender a valores de  $U > 0$  y corresponde a seguir las trayectorias nulas dirigidas al futuro, por lo que es cubierta por las coordenadas de Eddington-Finkelstein entrantes  $(v, r, \theta, \phi)$ , esto nos dice que corresponde al interior de agujero negro. Notar que una vez que se entra en la región II es imposible volver a la región I y el punto de no retorno,  $U = 0$  ( $r = 2GM$ ), se llama *horizonte de eventos futuro*. Se puede observar además, que cualquier trayectoria tipo tiempo dirigida hacia el futuro que entre en esta región, termina en la singularidad  $r = 0$ . Por otro lado, aparecen dos regiones adicionales al extender los valores a  $V < 0$ . La región III corresponde al inverso temporal de la región II y ya que cualquier objeto puede escapar de esta región a la región I, pero nosotros nunca podremos llegar allí, recibe el nombre de agujero blanco. Además, la región IV esta desconectada causalmente de I y corresponde a su inverso temporal. Siguiendo la idea y considerando el caso de la región I, la región IV es asintóticamente plana y esta cubierta por las coordenadas de Eddington-Finkelstein salientes. La superficie  $V = 0$  se denomina *horizonte de eventos pasado* y es lo que nos separa del interior del agujero blanco.

En ocasiones es más conveniente trabajar con un sistema de coordenadas en el que una de ellas sea tipo tiempo y las demás sean tipo espacio. Para esto consideremos ahora un

nuevo sistema en función de las coordenadas  $U$  y  $V$

$$\begin{aligned} X &= \frac{1}{2}(U + V), \\ Y &= \frac{1}{2}(V - U), \end{aligned} \quad (2.3.21)$$

o en término de las coordenadas originales

$$\begin{aligned} X &= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4GM} \sinh\left(\frac{t}{4GM}\right), \\ Y &= \left(\frac{r}{2GM} - 1\right)^{\frac{1}{2}} e^{r/4GM} \cosh\left(\frac{t}{4GM}\right). \end{aligned} \quad (2.3.22)$$

En términos de las coordenadas  $(X, Y, \theta, \phi)$  la métrica es

$$ds^2 = -\frac{32G^3M^3}{r} e^{-r/2GM} (-dX^2 + dY^2) + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.23)$$

donde ahora la coordenada  $r$  está definida implícitamente como

$$X^2 - Y^2 = \left(\frac{r - 2GM}{2GM}\right) e^{r/2GM}. \quad (2.3.24)$$

En estas coordenadas, las curvas radiales nulas están dadas por la relación

$$X = \pm Y + \text{constante}, \quad (2.3.25)$$

y la superficie  $r = 2GM$  corresponde a

$$X = \pm Y. \quad (2.3.26)$$

Además, las superficies con  $r$  constante corresponden a las hipérbolas

$$X^2 - Y^2 = \text{constante}, \quad (2.3.27)$$

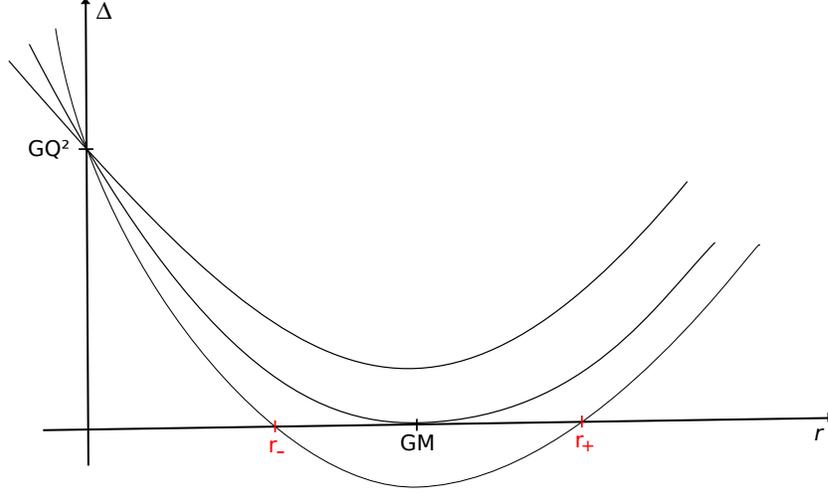
mientras que las superficies para  $t$  constante corresponden a las líneas rectas

$$\frac{X}{Y} = \tanh\left(\frac{t}{4GM}\right). \quad (2.3.28)$$

### 2.3.2. Solución con carga eléctrica

En el año 1918, Hans Reissner y Gunnar Nordström encontraron una solución a las ecuaciones de campo de Einstein (2.1.1), con constante cosmológica igual a cero, acoplada a campos eléctricos y una distribución de energía dada por el tensor de Energía-momento de Maxwell [26, 27]. Este tensor  $T_{\mu\nu}$  se obtiene de la acción (2.2.10) que para  $D = 4$  está dada por

$$S_M = -\frac{1}{4} \int d^4x \sqrt{-g} F_{\mu\nu} F^{\mu\nu}, \quad (2.3.29)$$


 Figura 2.6: Raíces de  $\Delta$  en la métrica de Reissner-Nordström.

así usando (2.1.8), como vimos en la sección 2.2, obtenemos (2.2.11), es decir

$$T_{\mu\nu} = F_{\mu\sigma}F_{\nu}^{\sigma} - \frac{1}{4}g_{\mu\nu}F_{\alpha\beta}F^{\alpha\beta}, \quad (2.3.30)$$

donde  $F_{\mu\nu}$  se conoce como el tensor de Maxwell o tensor electromagnético, y en función de su vector potencial  $A_{\mu}$ , su definición viene dada por la expresión (2.2.8). Utilizando las ecuaciones de Euler-Lagrange (2.2.9), obtenemos la ecuación de movimiento (2.2.12), de la cual, si queremos obtener una solución esféricamente simétrica y con campo eléctrico, el tensor  $F_{\mu\nu}$  toma la forma

$$F_{rt} = \frac{Q}{r^2}, \quad (2.3.31)$$

en la cual a la constante de integración  $Q$  se le llama *carga eléctrica*. La solución de Reissner-Nordström a las ecuaciones de Einstein es

$$ds^2 = -\left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right) dt^2 + \left(1 - \frac{2GM}{r} + \frac{GQ^2}{r^2}\right)^{-1} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.32)$$

donde podemos reescribir este elemento de línea de la forma

$$ds^2 = -\frac{\Delta}{r^2} dt^2 + \frac{r^2}{\Delta} dr^2 + r^2 d\Omega^2, \quad (2.3.33)$$

y  $\Delta$  esta dada por la expresión  $\Delta = r^2 - 2GM + GQ^2$ .

Analizando la métrica (2.3.33), observamos que tiene una singularidad en el caso  $r = 0$ . Pese a esto, las características del horizonte dependerá de las regiones donde  $\Delta = 0$ . Podemos escribir  $\Delta$  de la forma

$$\Delta = (r - r_+)(r - r_-), \quad (2.3.34)$$

donde el horizonte de eventos viene dado por

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2M^2 - GQ^2}, \quad (2.3.35)$$

lo que nos dice que el comportamiento de la métrica dependerá del valor del discriminante, en el cual encontramos tres casos de interés. Esto podemos verlo en la figura 2.6 y cada una de estas tres regiones las analizaremos por separado.

- I. Caso  $GM^2 < Q^2$ : Las raíces  $r_{\pm}$  no son reales,  $\Delta$  siempre toma valores positivos y la métrica no posee singularidades en estos puntos, salvo el caso  $r = 0$ , esto corresponde a la curva superior en la figura 2.6. Por todo esto, la coordenada  $t$  es tipo tiempo y  $r$  es tipo espacio. Al no tener la presencia de un horizonte de eventos, lo que obtenemos es una singularidad desnuda, lo cual sabemos no se presenta físicamente debido a la conjetura de censor cósmico.
- II. Caso  $GM^2 > Q^2$ : La métrica tiene singularidades de coordenadas en  $r_+$  y  $r_-$ . Si consideramos la curva inferior en la figura 2.6, vemos que nuestra función toma valores negativos para  $r_- < r < r_+$  y es positiva si consideramos  $r > r_+$  y  $r < r_-$ . Por esto la singularidad  $r = 0$  ahora es tipo tiempo, pero existen dos horizontes que la ocultan, en este caso se realiza un cambio de coordenadas similar al caso Schwarzschild.
- III. Caso  $GM^2 = Q^2$ : Este tipo de solución es conocida como la solución extrema de Reissner-Nordström. Existe un doble horizonte de eventos en  $r = GM$ , es decir ambos horizontes coinciden en este punto. La coordenada  $r$  ahora es nula en  $r = GM$  y espacial en las regiones del otro lado. La coordenada  $t$  es tipo tiempo a cada lado del horizonte de eventos, y nula en  $r = GM$ .

### 2.3.3. Solución rotante

La solución para agujeros negros rotantes fue encontrada en el año 1963 por el matemático neozelandés Roy Patrick Kerr [28]. Un agujero negro de Kerr es una región que queda delimitada por un horizonte de eventos y una ergoesfera. Esta nueva frontera describe una región donde la luz aún puede escapar. Debido a la conservación del momento angular, este espacio forma un elipsoide, en cuyo interior se encuentra un solo horizonte de eventos con su respectiva singularidad, que debido a la rotación tiene forma de anillo. El espacio-tiempo de Kerr nace al resolver las ecuaciones de la relatividad de Einstein en torno a un objeto masivo en rotación. Su resultado, llamada la métrica de Kerr, viene dado por [9]:

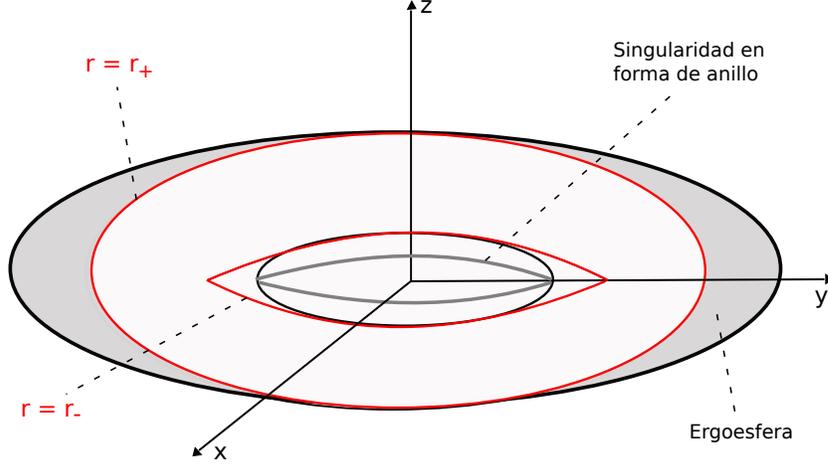


Figura 2.7: Horizontes de eventos, singularidad y ergoesfera para el agujero negro de Kerr.

$$\begin{aligned}
 ds^2 = & -\left(1 - \frac{2GM}{\rho^2}\right)dt^2 - \frac{2GMa r \sin^2 \theta}{\rho^2}(dtd\phi + d\phi dt) \\
 & + \frac{\rho^2}{\Delta}dr^2 + \rho^2 d\theta^2 + \frac{\sin^2 \theta}{\rho^2} \left[ (r^2 + a^2)^2 - a^2 \Delta \sin^2 \theta \right] d\phi,
 \end{aligned} \tag{2.3.36}$$

donde

$$\Delta(r) = r^2 - 2GM + a^2, \tag{2.3.37}$$

y

$$\rho^2(r, \theta) = r^2 + a^2 \cos^2 \theta. \tag{2.3.38}$$

Las dos constantes  $M$  y  $a$  parametrizan las posibles soluciones.  $M$  corresponde a la masa del agujero negro y  $a$  es el momento angular por unidad de masa

$$a = \frac{J}{M}, \tag{2.3.39}$$

donde  $J$  es el momento angular total. Considerando estas coordenadas, podemos notar que existe una singularidad cuando  $g^{rr} = 0$ , ya que  $\rho^2 \geq 0$ . Si hacemos que  $\Delta(r) = 0$ , resolvemos para  $r$  y obtenemos dos horizontes de eventos para el agujero negro de Kerr, estos son

$$r_{\pm} = GM \pm \sqrt{G^2 M^2 - a^2}, \tag{2.3.40}$$

Si reducimos  $a$  a cero, la métrica se transforma en la métrica de Schwarzschild y las dos singularidades corresponderían a  $r = 0$  y  $r = r_s$ , que corresponden a las singularidades de Schwarzschild. En ambos horizontes de eventos ( $r_+$  y  $r_-$ ) las coordenadas  $t$  y  $r$  son de tipo nulas. Existe una región fuera del horizonte  $r = r_+$  la cual es conocida como ergoesfera, y es una región del espacio-tiempo donde las partículas son libres de entrar y salir, pero

no pueden permanecer estacionarias. En lugar de esto deben moverse en la dirección de rotación del agujero negro. La verdadera singularidad de curvatura ocurre cuando  $\rho^2 = 0$ , es decir  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$ . Acá debemos tener en cuenta que  $r = 0$  no es un punto en espacio, sino un disco; el conjunto de puntos  $r = 0$  y  $\theta = \pi/2$  es en realidad el anillo en el borde de este disco [9]. Todo esto lo podemos ver en la figura 2.7.

### 2.3.4. Solución BTZ

Las fascinantes propiedades de los agujero negros, clásicas y especialmente cuánticas, hicieron desear a los físicos de la época tener disponible un análogo de dimensión menor que 4 que pudiera exhibir las características clave sin las complicaciones innecesarias. En el año 1992, los físicos chilenos M. Bañados, C. Teitelboim y J. Zanelli, encontraron una solución de agujero negro para las ecuaciones de Einstein en el vacío en  $(2+1)$  dimensiones con una constante cosmológica negativa  $\Lambda = -1/l^2$  [29].

Este agujero negro  $(2+1)$ -dimensional (denominado con el tiempo como el agujero negro BTZ en honor a sus autores) tiene propiedades termodinámicas similares a las encontradas en  $(3+1)$  dimensiones, entre ellas podemos nombrar que estos agujeros negros no tienen pelos, es decir, están totalmente caracterizados por su masa, momento angular y carga. Además, al igual que el agujero negro de Kerr (sección 2.3.3), un agujero negro BTZ rotante tiene un horizonte de eventos interior y uno exterior. A continuación daremos a conocer esta solución basándonos en [30], que plantea esta solución en dos casos: no rotante y rotante.

#### Agujero negro BTZ no rotante

La solución y la expresión para el horizonte de eventos  $r_+$  viene dada por:

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2d\varphi^2 \quad (2.3.41)$$

$$F(r) = -8GM + \frac{r^2}{l^2} \quad (2.3.42)$$

$$r_+^2 = 8GMl^2. \quad (2.3.43)$$

#### Agujero negro BTZ rotante

El elemento de línea para la métrica y sus respectivas expresiones para los horizontes de eventos interno  $r_-$  y externo  $r_+$ , donde  $M$  y  $J$  representan la masa y el momento

angular respectivamente, vienen dados por:

$$ds^2 = -F(r)dt^2 + \frac{dr^2}{F(r)} + r^2(d\varphi^2 + F(\varphi)dt)^2 \quad (2.3.44)$$

$$F(r) = -8GM + \frac{r^2}{l^2} + \frac{16G^2J^2}{r^2} \quad (2.3.45)$$

$$r_{\pm}^2 = 4GMl^2 \left( 1 \pm \left[ 1 - \left( \frac{J}{Ml} \right)^2 \right]^{1/2} \right). \quad (2.3.46)$$

Al igual que la solución de Schwarzschild es asintóticamente Minkowski, la solución BTZ es asintóticamente AdS<sub>3</sub>. Propiedades termodinámicas de esta solución (rotante y no rotante) son de real interés para esta tesis, esto lo veremos como un ejemplo más adelante en la sección [5.5](#).



## Capítulo 3

# Termodinámica de Agujeros Negros

Después de ese repaso por soluciones de agujero negro, en este capítulo analizamos estas regiones del espacio-tiempo desde un punto de vista termodinámico. Primero estudiaremos los postulados que dan vida a esta teoría, las llamadas leyes de la termodinámica de agujeros negros y analizaremos métodos utilizados en esta tesis para calcular los parámetros termodinámicos temperatura (temperatura de Hawking), entropía (fórmula de Wald) y masa (método cuasilocal).

### 3.1. Leyes de la Termodinámica de Agujeros Negros

J. Bardeen, B. Carter y S. Hawking publicaron en el año 1973 un trabajo titulado: *The four laws of black holes thermodynamics*, en él postulan cuatro leyes relativas a la dinámica de los agujeros negros en la relatividad general y destacan una sorprendente similitud con las leyes de la termodinámica [4].

**Ley cero:** La gravedad en la superficie de un agujero negro estacionario es constante sobre todo el horizonte de eventos. Esta ley es paralela a la ley cero de la termodinámica que establece la temperatura es constante a lo largo de un sistema en equilibrio termodinámico.

**Ley 1:** La primera ley de la termodinámica relaciona los cambios en la energía  $E$  del agujero negro con los cambios en su área  $A$ , su momento angular  $J$  y su carga  $Q$

$$dE = \frac{\kappa}{8\pi} dA + \Omega dJ + \Phi dQ. \quad (3.1.1)$$

donde  $\kappa$  es la gravedad de superficie,  $\Omega$  representa la velocidad angular y  $\Phi$  es el potencial eléctrico.

**Ley 2:** La segunda ley se refiere a la superficie  $A$  del horizonte de eventos

$$dA \geq 0. \quad (3.1.2)$$

El área nunca disminuye con el tiempo. Todo esto bajo la condición de energía nula:  $T_{\mu\nu}k^\mu k^\nu \geq 0$ , donde  $T_{\mu\nu}$  es el tensor de energía momento definido en (2.1.8) y  $k^\mu$  un vector nulo.

**Ley 3:** La tercera ley de la termodinámica de agujeros negros nos dice que si  $T_{\mu\nu}$  es acotado y cumple con la condición de energía débil, es decir  $T_{\mu\nu}t^\mu t^\nu \geq 0$  con  $t^\mu$  un vector tipo tiempo, entonces la gravedad de superficie  $\kappa$  no puede ser cero. Esto se asemeja a la forma débil de la tercera ley de la termodinámica, que establece que es imposible alcanzar el cero absoluto en cualquier sistema, pero no está de acuerdo con la versión fuerte de la tercera ley que afirma que la entropía se aproxima a cero cuando la temperatura se lleva a cero.

Vale la pena destacar que las cuatro leyes de la mecánica de agujeros negros son (casi) idénticas a las cuatro leyes de la termodinámica cuando hacemos las identificaciones [31]:

$$E = E, \quad T = \frac{\kappa}{2\pi}, \quad S = \frac{A}{4}. \quad (3.1.3)$$

Expuestas estas cuatro leyes que nos dan el comportamiento termodinámico de los agujeros negros, resulta interesante conocer métodos para calcular los parámetros involucrados.

## 3.2. Vacío cuántico y Temperatura de Hawking

La física Newtoniana no puede describir fenómenos que implican velocidades cercanas (o iguales) a la de la luz, es aquí, a velocidades muy altas, que la teoría de la relatividad toma el puesto de la física Clásica. La física newtoniana tampoco funciona a dimensiones muy pequeñas, comparables a la de los átomos, en este caso es la mecánica cuántica la que toma el puesto de la mecánica newtoniana. La mecánica cuántica nació a principios del siglo veinte con el fin de explicar algunos fenómenos que parecían contradecir los principios de la mecánica clásica. Entre ellos unos de los problemas más importantes de la física era explicar la forma de la llamada radiación de cuerpo negro, es decir la radiación emitida por un cuerpo caliente aislado del exterior y en perfecto equilibrio térmico, por ejemplo un

recipiente cerrado de paredes calientes perfectamente aislado. Este problema fue resuelto por el físico alemán Max Planck postulando que que la luz se propaga en paquetes de energía, de modo tal que cada paquete, posee una energía  $E$  proporcional a la frecuencia  $\nu$ :

$$E = \hbar \nu, \tag{3.2.1}$$

donde  $\hbar$  es la constante de Planck. Tiempo después Albert Einstein postuló que que la luz está constituida de partículas (fotones) que poseen una energía dada por la fórmula de Planck. Con esta hipótesis Einstein logró explicar el efecto fotoeléctrico, lo que le valió el premio Nobel en 1920 y contribuyó de gran manera a fundar la física cuántica.

Hasta ahora, nos solo hemos hablado de los agujeros negros refiriéndonos a ellos como “clásicos”, en el sentido que no se incluye ningún efecto cuántico. En particular, la propiedad más importante de un agujero negro es de no dejar escapar nada de su horizonte, incluida la luz. A pesar de esto, Steven Hawking (1942 - ) en el año 1974 descubrió que si se toman en cuenta ciertos efectos cuánticos un agujero negro emite radiación. Este fue un resultado totalmente inesperado y está relacionado con el concepto de *vacío cuántico*.

Antes de la mecánica cuántica, el concepto de vacío era algo trivial: ausencia total de energía y materia. Ahora sabemos que si nos ponemos en el contexto de lo cuántico la situación se vuelve más complicada e interesante. Todo este problema tiene su origen en un principio fundamental de la mecánica cuántica: *el principio de incertidumbre de Heisenberg*, que establece un límite a la precisión con la que se pueden medir simultáneamente la velocidad de una partícula y su posición. Equivalentemente este principio nos dice que es posible restringir la medición de la energía de una partícula y el momento en que efectúa la medición: Si  $\Delta E$  y  $\Delta t$  representan los errores en la medición de la energía y el tiempo respectivamente, es decir, si  $E$  es la energía medida, solo se puede asegurar que la energía real se encuentra muy probablemente entre  $E - \Delta E$  y  $E + \Delta E$ , lo mismo para  $t$  y  $\Delta t$ , el principio de incertidumbre nos dice que los errores no pueden ser arbitrariamente pequeños, independientemente de la precisión de las mediciones deben cumplir con la desigualdad:

$$\Delta E \Delta t > \hbar. \tag{3.2.2}$$

La relatividad general nos da una equivalencia entre energía y masa, la cual al combinarla con este principio nos lleva a un resultado sorprendente: se puede crear materia a partir del vacío. Claramente esto nos es posible según la física clásica, ya que esta nos dice que la materia no puede crearse de la nada, pero si es factible según la física cuántica con la condición de que el tiempo de vida de estas partículas que aparecen y desaparecen de manera súbita, sea suficientemente corto. Así, si consideramos una partícula de masa

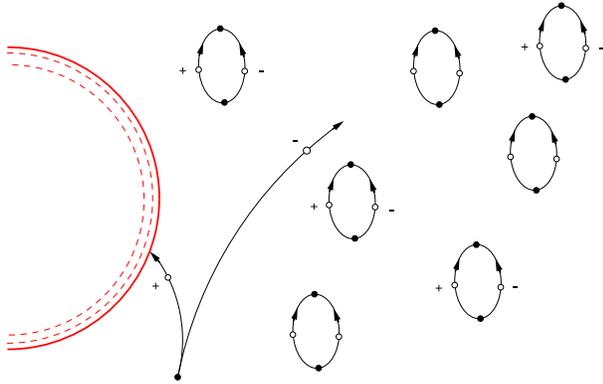


Figura 3.1: Un par virtual creado cerca de un agujero negro puede desgarrarse por la fuerza de marea.

$M$ , esta posee una energía  $Mc^2$ , si su tiempo de vida es menor que  $\frac{\hbar}{Mc^2}$ , considerando el principio de incertidumbre, esta partícula no será detectada ya que durante ese periodo de tiempo la energía de esta está por debajo del margen de error con el que se podía medir. Con esto, el vacío de la mecánica cuántica está repleto de partículas que aparecen y desaparecen, las cuales refugiándose en el principio de incertidumbre parecen saltarse el principio de conservación de masa. Estas partículas se conocen como *partículas virtuales*.

La radiación de los agujeros negros es un efecto producido por la gravedad sobre el vacío cuántico. Una de las interpretaciones propuestas por Hawking del efecto descubierto por él, en terminos comprensibles es usar el hecho que la fuerza de gravedad varía con la distancia: Si consideramos dos cuerpos interactuando, las partes que están más cerca de un cuerpo atractor son atraídas con más intensidad que las partes más lejanas. Este efecto lleva por nombre *fuerza de marea*, y está relacionada obviamente al efecto que produce la deformación en los océanos de la tierra, ya que la luna atrae con mayor intensidad las parte terrestre más cercana a ella. Los agujeros negros también inducen fuerzas de marea sobre cuerpos cercanos a ellos: Si un par virtual (partícula y antipartícula) se crea muy cerca de un agujero negro, la probabilidad de que la fuerza de marea rompa el par, es decir que al volverse reales estas partículas una sea atraída hacia dentro del horizonte de eventos mientras la otra escapa, no es cero. La partícula que escapa lleva consigo parte de la energía gravitacional del agujero negro y es esta energía liberada es la que produce la radiación.

Hawking demostró que un agujero negro radia exactamente como si fuera un cuerpo negro en equilibrio termodinámico total. La gravedad superficial es la aceleración gravita-

cional producida por el agujero negro en el sitio justo de su horizonte.

La temperatura  $T$  se puede relacionar con la gravedad superficial  $\kappa$  de un agujero negro con masa  $M$ , carga  $Q$  y momento angular  $J$ , por medio de la expresión:

$$T = \frac{\hbar \kappa}{4 \pi c k_B}, \quad (3.2.3)$$

donde  $k_B$  es la constante de Boltzmann y  $\kappa$  esta dada por:

$$\kappa = \frac{4 \pi}{A} \sqrt{G^2 M^2 - G Q^2 - a^2 c^2}, \quad (3.2.4)$$

con  $a = \frac{J}{M}$  y  $A$  el área del horizonte de eventos. Notar que, si consideramos el caso de un agujero negro sin carga ni momento angular, se reduce a

$$\kappa = \frac{c^4}{4 G M}. \quad (3.2.5)$$

Es importante destacar que la temperatura de un agujero negro es inversamente proporcional a su masa. Así para un agujero negro cuya masa se pueda comparar a la de nuestro sol, la temperatura es muy baja: una millonésima de grados sobre el cero absoluto. En cambio para agujeros negros poco masivos, si es que existen, este efecto podría ser muy importante: uno con una masa de cien millones de toneladas (cerca de la masa de una montaña) tendría una temperatura de casi un billón de grados Kelvin.

Cabe también destacar que haciendo una analogía con la llamada ley cero de la termodinámica que indica que un sistema físico en equilibrio completo posee la misma temperatura en todas sus partes, en el caso de los agujeros negros se puede demostrar que la gravedad superficial tiene el mismo valor en cada punto del horizonte.

### 3.3. Entropía de Wald

Si todo lo que cae dentro de un agujero negro desaparece y no puede volver a salir, ¿qué pasa con la entropía? Suponer que la entropía del universo se reduce al lanzar cosas entrópicas dentro del agujero negro iría en contra de las leyes termodinámicas. Para un agujero negro conocer su masa, o su radio, o su área, o su volumen eran equivalentes, solo debía conocer una de ellas y ya tendríamos las otras, a raíz de esto no había indicios de entropía. Sabiendo lo anterior, por los años 70, Jacob Bekenstein (1947 - 2015) supuso que la masa de un agujero negro era una medida de su entropía, de hecho si aumentamos su masa y su área, aumentamos su entropía salvando así la termodinámica de agujeros negros.

Una de las constantes físicas más importantes es la constante de Planck  $\hbar$ , esta desempeña un papel central en la teoría de la mecánica cuántica, y a las unidades de Planck se suelen asociar a valores óptimos en la naturaleza. Su nombre se debe a su descubridor, un físico y matemático alemán considerado como el fundador de la teoría cuántica, Max Planck (1858 - 1947). Bekenstein pensó que la relación entre el área de un agujero negro y su entropía debía depender de constantes físicas fundamentales, la entropía debía ser proporcional al área dividida entre el área de Planck

$$S \propto \frac{A}{L_p^2}. \quad (3.3.1)$$

Así para el caso estático tenemos la velocidad de la luz, la constante de Boltzmann, la constante de gravitación universal y la constante de Planck involucradas. Un gran acierto si destacamos que esto se considera el comienzo de la gravedad cuántica, ya que esta ecuación (3.3.1) era la primera de su tipo: relativista, termodinámica, gravitatoria y cuántica a la vez.

Al poco tiempo Hawking demostró que Bekenstein estaba en lo cierto. Los agujeros negros se comportaban realmente como objetos termodinámicos ordinarios. Esto significa, entre otras cosas, que la entropía de un agujero negro es efectivamente proporcional al área de su horizonte de sucesos. De hecho, el cálculo de Hawking le permitió determinar con precisión la constante de proporcionalidad,  $\frac{1}{4}$ . Es decir la entropía de un agujero negro es  $\frac{1}{4}$  del área de su horizonte de sucesos, medido en unidades del área de Planck:

$$S_{BH} = \frac{A}{4L_p^2}. \quad (3.3.2)$$

Podemos conjeturar que el subíndice  $BH$  significa black hole (agujero negro en inglés) o Bekenstein- Haking, como preframos. Esta fórmula es el indicio mas importante que tenemos de la conciliación de la gravitación con la mecánica cuántica [32].

En los años noventa el físico estadounidense Robert Wald (1947 - ) publicó una serie de artículos en los que construye una base geométrica sólida para la primera ley de la termodinámica de los agujeros negros [33,34]. Los fundamentos de su enfoque se describen en un artículo en conjunto con Jooan Lee en 1989. Introducen un formalismo de Lagrange que sea compatible con teorías invariantes bajo difeomorfismos, incluyendo la relatividad general [35]. Cuatro años más tarde una nueva derivación de la primera ley apareció [33]. En este trabajo Wald muestra que la entropía del agujero negro siempre se puede expresar como una cantidad geométrica local integrándola en un espacio (sección transversal) del horizonte. Su expresión para la entropía es

$$S_W = -2\pi \int_{\Sigma} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta}} \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} \sqrt{|\hbar|} \quad (3.3.3)$$

Esta última expresión se conoce como *fórmula de Wald*. El dominio de integración  $\Sigma$  es una sección transversal de dos dimensiones del horizonte de eventos,  $h$  el determinante de la métrica inducida,  $\epsilon_{\alpha\beta}$  es un vector binormal a  $\Sigma$ , antisimétrico y normalizado de la forma  $\epsilon_{\alpha\beta}\epsilon^{\alpha\beta} = -2$ , y la variación del lagrangiano de la teoría con respecto al tensor de Riemann está representado por  $\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta}}$ .

Así, si consideremos la solución de Schwarzschild de la acción de Einstein-Hilbert, el horizonte de eventos es  $S^2$  que tiene dos direcciones normales a lo largo de  $r$  y  $t$ . Podemos construir un 2-tensor antisimétrico a lo largo de estas direcciones para que  $\epsilon_{rt} = \epsilon_{tr} = -1$ . Para este ejemplo tenemos que el lagrangiano es  $\mathcal{L} = \frac{1}{16\pi} R$ , entonces su variación con respecto a  $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$  es:

$$\frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{\alpha\beta\gamma\delta}} = \frac{1}{32\pi}(g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}). \quad (3.3.4)$$

Por lo tanto, la entropía de Wald viene dada por:

$$\begin{aligned} S_W &= \frac{1}{8} \int_{S^2} \frac{1}{2} (g^{\alpha\gamma}g^{\beta\delta} - g^{\alpha\delta}g^{\beta\gamma}) \epsilon_{\alpha\beta} \epsilon_{\gamma\delta} \sqrt{|h|} d^2\Omega \\ &= \frac{1}{8} \int_{S^2} 2 g^{tt} g^{rr} \sqrt{h} d^2\Omega \\ &= \frac{1}{4} \int_{S^2} \sqrt{h} d^2\Omega \\ &= \frac{A}{4} \end{aligned}$$

la que corresponde a la expresión de la entropía de Bekenstein-Hawking (3.3.2), tal como se podía esperar.

### 3.4. Masa (Formalismo Cuasilocal)

Existen al menos dos maneras diferentes para describir que tan grande es algo. Podemos referirnos a la cantidad de masa que tiene, o a la cantidad de espacio que ocupa. Cuanto más masivo es un agujero negro, más espacio ocupa. Lo que sabemos hasta el momento de la masa que poseen los agujeros negros es que esta no tiene límites conocidos, no hay máximo ni mínimo, pero teniendo en cuenta que los agujeros negros se forman a partir de la muerte de estrellas masivas debería de existir un límite máximo de peso de los agujeros negros que sería a lo más igual a la masa máxima de una estrella masiva. Dicha masa límite es igual a diez veces la masa del Sol. En los últimos años se ha encontrado evidencia de la existencia de agujeros negros en el centro de galaxias masivas, y se

cree, a partir de esto, que dichos agujeros negros poseerían una masa de un millón de soles.

Un método para calcular la masa de soluciones de agujeros negros es el método cuasilocal, el cual corresponde a una generalización del formalismo ADT. Esta formulación proporciona una forma muy conveniente de determinar las cargas conservadas cuasilocales de agujeros negros [36, 37].

Consideremos la variación de la acción con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$  para una teoría gravitatoria covariante en un espacio-tiempo  $D$ -dimensional, esto es

$$\delta I[g] = \frac{1}{\kappa} \int d^D x [\sqrt{-g} \mathcal{G}_{\mu\nu} \delta g^{\mu\nu} + \partial_\mu \Theta^\mu(g; \delta g)], \quad (3.4.1)$$

donde  $\mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$  es la ecuación de movimiento para la métrica y  $\Theta^\mu$  denota el término de superficie. La transformación de la métrica, bajo el difeomorfismo  $\zeta$ , es

$$\delta_\zeta g_{\mu\nu} = \nabla_\mu \zeta_\nu + \nabla_\nu \zeta_\mu \quad (3.4.2)$$

y la correspondiente transformación de la densidad de Lagrange,  $L$  está dada por

$$\delta_\zeta(L\sqrt{-g}) = \partial_\mu(\zeta^\mu \sqrt{-g}L). \quad (3.4.3)$$

Usando la identidad de Bianchi  $\nabla_\mu \mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$ , podemos obtener una corriente de Noether conservada fuera de la cáscara  $\mathcal{J}^\mu$  de la ecuación (3.4.1) como

$$J^\mu(g; \zeta) = 2\sqrt{-g} \mathcal{G}^{\mu\nu}(g) \zeta_\nu + \zeta^\mu \sqrt{-g} L(g) - \Theta^\mu(g; \zeta). \quad (3.4.4)$$

donde el concepto *fuera de la cáscara* hace referencia a que no estamos utilizando las ecuaciones de movimiento  $\mathcal{G}^{\mu\nu} = 0$ . Ya que  $J^\mu$  es conservado,  $\partial_\mu J^\mu = 0$ , el tensor antisimétrico  $K^{\mu\nu}$ , al cual lo llamaremos como el potencial Noether (fuera de la cáscara), se puede introducir como  $J^\mu \equiv \partial_\nu K^{\mu\nu}$ .

Nuestro fin ahora es mostrar la relación entre el potencial de Noether  $K^{\mu\nu}$  y el potencial  $Q^{\mu\nu}$  de la extensión del método ADT [38, 39], el cual permite calcular la masa y el momento angular para teorías conocidas como gravedad masiva topológica [40–44] y nueva gravedad masiva [45, 46]. Este potencial puede ser introducido como

$$J_{\text{ADT}}^\mu \equiv \nabla_\nu Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu} = \delta \mathcal{G}^{\mu\nu} \xi_\nu + \mathcal{G}^{\mu\alpha} \delta g_{\alpha\nu} \xi^\nu - \frac{1}{2} \xi^\mu \mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} + \frac{1}{2} g^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} \mathcal{G}_\nu^\mu \xi^\nu, \quad (3.4.5)$$

donde  $Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}$  es nuestro potencial ADT, el cual puede ser reescrito de la forma [36]

$$\delta(\sqrt{-g} \mathcal{G}^{\mu\nu} \xi_\nu) - \frac{1}{2} \sqrt{-g} \xi^\mu \mathcal{G}^{\alpha\beta} \delta g_{\alpha\beta} = \partial_\nu(\sqrt{-g} Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}). \quad (3.4.6)$$

El difeomorfismo  $\zeta$  será considerado como un vector de Killing  $\xi$  y bajo la variación de la métrica estudiaremos la variación del potencial de Noether,  $\delta K^{\mu\nu}$ , preservando el

vector de Killing, es decir  $\delta\xi^\mu = 0$ . Teniendo en cuenta esto, podemos escribir el cambio de la corriente  $J^\mu$  en terminos del potencial  $K^{\mu\nu}$

$$\partial_\nu(\delta K^{\mu\nu}) = 2\delta\left(\sqrt{-g}\mathcal{G}^{\mu\nu}\xi_\nu\right) + \xi^\mu\delta(\sqrt{-g}L) - \delta\Theta^\mu(g; \xi). \quad (3.4.7)$$

Como estamos asumiendo  $\delta\xi^\mu = 0$ , podemos utilizar la siguiente relación sobre el término de superficie [34,35]

$$\mathcal{L}_\xi\Theta^\mu(g; \delta g) - \delta\Theta^\mu(g; \xi) = 0, \quad (3.4.8)$$

donde  $\mathcal{L}_\xi$  es la derivada de Lie a lo largo del vector de Killing  $\xi$  y el segundo término denota la variación del término de superficie con respecto a la métrica  $g_{\mu\nu}$ . Considerando las ecuaciones (3.4.6), (3.4.7) y (3.4.8) tenemos una relación para los potenciales dada por

$$\sqrt{-g}Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}(g; \delta g) = \frac{1}{2}\delta K^{\mu\nu}(g; \xi) - \xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}(g; \delta g). \quad (3.4.9)$$

Gracias a esta última relación, podemos encontrar una expresión para una carga conservada en términos del potencial de Noether  $K^{\mu\nu}$ , el vector de Killing  $\xi^\mu$  y el término de superficie  $\Theta^\mu$ . Considerando un camino uniparamétrico dentro del espacio solución, caracterizado por una constante  $s \in [0, 1]$  y la expresión para el potencial  $Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}$  dado en (3.4.9), podemos obtener una carga cuasilocal de la forma [37]

$$Q(\xi) = \frac{1}{\kappa} \int_{\mathcal{B}} d^{D-2}x_{\mu\nu} \left( \Delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Theta^{\nu]}(\xi | s\mathcal{M}) \right), \quad (3.4.10)$$

donde el camino uniparamétrico  $s$  es tomado como una interpolación a través de un parámetro libre  $\mathcal{Q}$  dentro de las ecuaciones de movimiento de manera tal que  $s\mathcal{Q} \in [0, \mathcal{Q}]$ ,  $\Delta K^{\mu\nu}(\xi)$  denota la diferencia finita  $K_{s=1}^{\mu\nu}(\xi) - K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$  entre los dos puntos finales del camino,  $d^{D-2}x_{\mu\nu}$  representa la integración sobre un subespacio de codimensión dos y  $\mathcal{B}$  una región finita en el espacio-tiempo que no necesita ser localizada en el infinito asintótico [37].

Para obtener una expresión concreta para cargas conservadas cuasilocales, consideremos un lagrangiano que contiene sólo los invariantes de tensores de curvatura:  $L = L[g, R, R^2, R^{\mu\nu}R_{\mu\nu}, \dots]$ . Notar que las ecuaciones de movimiento pueden ser representadas por

$$\mathcal{G}_{\mu\nu} = P_{(\mu}^{\alpha\beta\gamma} R_{\nu)\alpha\beta\gamma} - 2\nabla^\rho\nabla^\sigma P_{\mu\nu\rho\sigma} - \frac{1}{2}g_{\mu\nu}L, \quad (3.4.11)$$

donde el tensor  $P$  es definido como  $P^{\mu\nu\rho\sigma} \equiv \partial L / \partial R_{\mu\nu\rho\sigma}$ . Como estamos estudiando teorías que poseen curvaturas cuadráticas, el término de superficie y el potencial de Noether están dados por [37]

$$\Theta^\mu(\delta g) = 2\sqrt{-g}[P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta}\nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}], \quad (3.4.12)$$

$$K^{\mu\nu} = \sqrt{-g}[2P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma - 4\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}], \quad (3.4.13)$$

Este caso es fundamental en este trabajo, ya que estudiamos soluciones de agujero negro asintóticamente Lifshitz y su generalización a espacio-tiempos con violación al hiperescalamiento, espacios expuestos en capítulos posteriores, con teorías gravitatorias provistas de correcciones superiores.

## Capítulo 4

# Teoría de campos conforme 2-dimensional

Este capítulo tiene como objetivo dar una introducción a la teoría de campos conforme bidimensional, tratando de dar la base adecuada para entender este formalismo matemático que puede ser aplicado a la teoría de agujeros negros. Primero analizaremos el grupo conforme y comenzaremos a ver esta teoría de campos en dos dimensiones. Analizaremos aspectos tan importantes como el tensor de energía momento, campos primarios, el proceso de cuantización radial, la expansión en producto de operadores y por último el algebra de Virasoro, que una extensión cuántica del álgebra de Witt.

### 4.1. El grupo conforme

Denotemos por  $g_{\mu\nu}$  el tensor métrico en un espacio de dimensión  $D$ . Bajo una transformación general de coordenadas  $x^\mu \rightarrow x'^\mu$  la métrica se transforma de acuerdo a

$$g'_{\mu\nu}(x') = \frac{\partial x^\alpha}{\partial x'^\mu} \frac{\partial x^\beta}{\partial x'^\nu} g_{\alpha\beta}(x). \quad (4.1.1)$$

Por definición una *transformación conforme* de las coordenadas es una función invertible que actúa como  $x \rightarrow x'$ , el cual deja la métrica invariante salvo un factor escalar:

$$g'_{\mu\nu}(x') = \Lambda(x) g_{\mu\nu}(x). \quad (4.1.2)$$

En otras palabras, una transformación conforme es localmente equivalente a una (pseudo) rotación y una dilatación. El grupo conforme es un grupo de transformaciones de que cumplen con (4.1.2). Notar que el grupo de Poincaré (grupo de Lorentz mas traslaciones) es un subgrupo del grupo conforme ya que este deja la métrica invariante ( $\Lambda(x) = 1$ ) [13].

El epíteto conforme deriva de la propiedad de que las transformaciones no afectan el ángulo entre dos curvas arbitrarias que se cruzan en un punto a pesar de una dilatación local, es decir, el grupo conforme preserva ángulos.

En un teoría de campos conforme, la acción permanece invariante, es decir  $S[g'_{\mu\nu}(x')] = S[g_{\mu\nu}(x)]$  y sabemos por la ecuación (2.1.8) que variando la acción con respecto a la métrica obtenemos el tensor de energía-momento.

Bajo una transformación conforme  $g_{\mu\nu}$  se puede transformar como (4.1.2). Entonces, tomando una expansión infinitesimal de  $\Lambda(x)$

$$\begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= (1 + \sigma(x))g_{\mu\nu} \\ g'_{\mu\nu} &= g_{\mu\nu} + \sigma(x)g_{\mu\nu}. \end{aligned}$$

tenemos que  $\delta g_{\mu\nu} = \sigma(x)g_{\mu\nu}$ , ya que  $\delta g_{\mu\nu} = g'_{\mu\nu} - g_{\mu\nu}$  y así la expresión (??) nos queda

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta S &= \sigma(x)T^{\mu\nu}g_{\mu\nu} \\ \frac{1}{\sqrt{-g}}\delta S &= \sigma(x)T^\mu{}_\mu. \end{aligned}$$

Como consideramos que la acción es invariante bajo transformaciones conformes, esta condición implica que el tensor de energía-momento es sin traza, es decir  $T^\mu{}_\mu = 0$  [14].

Es conveniente notar que una transformación conforme no es una transformación general de coordenadas. En efecto, una transformación de coordenadas describe la misma geometría desde un sistema de coordenadas diferente (en particular el elemento de área se mantiene invariante) en cambio una transformación conforme relaciona distintas geometrías desde el mismo sistema de coordenadas.

Para determinar los generadores infinitesimales del grupo conforme consideraremos la transformación de coordenadas infinitesimal

$$x^\mu \rightarrow x'^\mu = x^\mu + \epsilon^\mu, \tag{4.1.3}$$

así, la métrica a primer orden de  $\epsilon$  cambia de la forma

$$g_{\mu\nu} \rightarrow g_{\mu\nu} + (\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu). \tag{4.1.4}$$

Por simplicidad, se asume que la transformación conforme es una deformación infinitesimal en el espacio-tiempo de Minkowski ( $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu}$ ). Como esta última transformación (4.1.4) se mantiene invariante conforme, es decir cumple (4.1.2), el término  $(\partial_\mu\epsilon_\nu + \partial_\nu\epsilon_\mu)$

debe ser proporcional a  $\eta_{\mu\nu}$

$$(\partial_\mu \epsilon_\nu + \partial_\nu \epsilon_\mu) = \frac{2}{D} \partial_\rho \epsilon^\rho \eta_{\mu\nu}. \quad (4.1.5)$$

Notar que al comparar (4.1.2) y (4.1.5) tenemos que  $\Lambda(x) = 1 + \frac{2}{D} \partial_\rho \epsilon^\rho$ .

Por aplicación de una derivada extra  $\partial_\rho$  a (4.1.5), permutando índices y considerando una combinación lineal tenemos que

$$2\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho = \eta_{\mu\rho} \partial_\nu \Lambda + \eta_{\nu\rho} \partial_\mu \Lambda - \eta_{\mu\nu} \partial_\rho \Lambda. \quad (4.1.6)$$

y contrayendo con  $\eta_{\mu\nu}$ , aplicando  $\partial_\nu$  sobre (4.1.6) y lo que nos queda es

$$(\eta_{\mu\nu} \square + (D-2)\partial_\mu \partial_\nu) \partial_\rho \epsilon^\rho = 0. \quad (4.1.7)$$

Para analizar las soluciones de la ecuación diferencial (4.1.7), primero debemos notar que contrayendo esta ecuación con  $\eta_{\mu\nu}$  lo que tenemos es

$$(D-1)\square \Lambda = 0, \quad (4.1.8)$$

entonces para el caso  $D=1$  la ecuación anterior no impone restricciones sobre la función  $\Lambda$ , y entonces cualquier transformación suave es conforme de una dimensión. Esto último es trivial, ya que la noción de ángulo no existe [14].

El caso  $D=2$  será analizado en la siguiente sección. Para el caso  $D \geq 3$  debemos notar que las ecuaciones (4.1.7) y (4.1.8) implican que  $\partial_\mu \partial_\nu \Lambda = 0$ , es decir, la función  $\Lambda$  es a lo más lineal en las coordenadas:

$$\Lambda(x) = A + B_\mu x^\mu, \quad (\text{con } A, B_\mu \text{ constantes}). \quad (4.1.9)$$

Si sustituimos la expresión (4.1.9) en la ecuación (4.1.6), podemos ver que  $\partial_\mu \partial_\nu \epsilon_\rho$  es constante, lo que significa que  $\epsilon_\mu$  es lo más cuadrático en  $x$ . Así las soluciones de la ecuación diferencial (4.1.7) nos dan distintas posibilidades para  $\epsilon^\mu$ :

- $\epsilon^\mu = a^\mu$ , lo cual corresponden a traslaciones de  $x$ .
- $\epsilon^\mu = \omega^\mu{}_\nu x^\nu$  donde  $\omega^\mu{}_\nu$  es la suma de una parte antisimétrica y otra de traza pura, donde la parte antisimétrica corresponde a rotaciones rígidas, y el término traza pura representa una transformación de escala.
- $\epsilon^\mu = b^\mu x^2 - 2(\mathbf{x} \cdot \mathbf{b})x^\mu$ , esta transformación recibe el nombre de *Transformación especial conforme*.

Así, las transformaciones conformes finitas estan dadas por:

$$x'^{\mu} = x^{\mu} + a^{\mu} \quad (4.1.10)$$

$$x'^{\mu} = \alpha x^{\mu} \quad (4.1.11)$$

$$x'^{\mu} = M^{\mu}_{\nu} x^{\nu} \quad (4.1.12)$$

$$x'^{\mu} = \frac{x^{\mu} - b^{\mu} x^2}{1 - 2\mathbf{b} \cdot \mathbf{x} + b^2 x^2} \quad (4.1.13)$$

Donde (4.1.10) y (4.1.12) representan traslaciones y rotaciones respectivamente, (4.1.11) es una dilatación y (4.1.13) una transformación especial conforme.

De acuerdo a estas transformaciones, los generadores infinitesimales del grupo conforme son

$$P_{\mu} = -i \partial_{\mu} \quad (4.1.14)$$

$$D = -i x^{\mu} \partial_{\mu} \quad (4.1.15)$$

$$L_{\mu\nu} = i(x_{\mu} \partial_{\nu} - x_{\nu} \partial_{\mu}) \quad (4.1.16)$$

$$K_{\mu} = -i(2x_{\mu} x^{\nu} \partial_{\nu} - x^2 \partial_{\mu}) \quad (4.1.17)$$

Acá, (4.1.14) corresponde a traslaciones, (4.1.15) a dilataciones, (4.1.16) y (4.1.17) a rotación y transformación especial conforme respectivamente.

Se puede demostrar que estos generadores obedecen ciertas reglas de conmutación generando un álgebra, definida como *el álgebra conforme*. Partiendo de una métrica con signatura  $(p, q)$  el grupo conforme es isomorfo a  $SO(p+1, q+1)$ .

## 4.2. Teoría de campos conforme en 2 dimensiones

Para  $D = 2$  con  $g_{\mu\nu} = \eta_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ , las ecuaciones (4.1.5) se reducen a las ecuaciones de Cauchy-Riemann:

$$\partial_1 \varepsilon_1 = \partial_2 \varepsilon_2, \quad \partial_1 \varepsilon_2 = -\partial_2 \varepsilon_1. \quad (4.2.1)$$

A toda función  $f(z)$  que cumpla con (4.2.1) se le llama función analítica. Luego, consideramos  $\varepsilon$  como una función de  $z$  y es natural definir

$$\varepsilon = \varepsilon_1 + i\varepsilon_2, \quad \bar{\varepsilon} = \varepsilon_1 - i\varepsilon_2 \quad (4.2.2)$$

$$z = x^1 + ix^2, \quad \bar{z} = x^1 - ix^2, \quad (4.2.3)$$

lo que nos lleva a

$$\partial_z \bar{\varepsilon} = 0, \quad \partial_{\bar{z}} \varepsilon = 0 \quad (4.2.4)$$

con  $\partial_z := \frac{\partial}{\partial z}$ . La solución general de estas condiciones nos da que  $\varepsilon$  es una función arbitraria de  $z$  (que no depende de  $\bar{z}$ ) y  $\bar{\varepsilon}$  es una función arbitraria de  $\bar{z}$ , es decir  $\varepsilon = \varepsilon(z)$  y  $\bar{\varepsilon} = \bar{\varepsilon}(\bar{z})$ . Las transformaciones conforme en dos dimensiones entonces coinciden con la transformación analítica dada por

$$z \rightarrow f(z), \quad \bar{z} \rightarrow \bar{f}(\bar{z}), \quad (4.2.5)$$

donde  $f(z)$  es una función arbitraria de  $z$ , y

$$ds^2 = dz d\bar{z} \rightarrow \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2 dz d\bar{z}, \quad (4.2.6)$$

y  $\Lambda = \left| \frac{\partial f}{\partial z} \right|^2$ . Una función holomorfa  $f(z)$  puede ser expandida por un desarrollo de Laurent

$$f(z) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n z^n \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (4.2.7)$$

donde  $a_n$  son parámetros de simetría, y un número infinito de parámetros de simetrías corresponde a infinitas simetrías [30].

Usualmente las simetrías implican la existencia de cargas conservadas. La corriente que corresponde a una transformación simétrica conforme  $\varepsilon^\mu$  que satisface la condición (4.1.5) es

$$J_\mu = T_{\mu\nu} \varepsilon^\nu. \quad (4.2.8)$$

El tensor de energía momento es conservado y sin traza, lo que hace que la corriente sea conservada

$$\partial^\mu J_\mu(\varepsilon) = (\partial^\mu T_{\mu\nu}) \varepsilon^\nu + T_{\mu\nu} (\partial^\mu \varepsilon^\nu) = 0. \quad (4.2.9)$$

Los generadores de simetría en teoría cuántica de campos son cargas conservadas que vienen de corrientes conservadas. Como existe un número infinito de funciones analíticas,  $f(z)$ , entonces por el teorema de Noether existe un número infinito de cargas conservadas correspondiendo a un número infinito de simetrías [13].

Las transformaciones infinitesimales de (4.2.5) nos dan

$$z \rightarrow z' = z + \varepsilon_n(z) \quad \bar{z} = \bar{z}' = \bar{z} + \bar{\varepsilon}_n(\bar{z}) \quad (n \in \mathbb{Z}), \quad (4.2.10)$$

donde

$$\varepsilon_n(z) = -z^{n+1} \quad \bar{\varepsilon}_n(\bar{z}) = -\bar{z}^{n+1}. \quad (4.2.11)$$

Los generadores de las transformaciones infinitesimales son

$$l_n = -z^{n+1} \partial_z \quad \bar{l}_n = -\bar{z}^{n+1} \quad (n \in \mathbb{Z}). \quad (4.2.12)$$

Las relaciones de conmutación de estos generadores infinitesimales forman el álgebra local conforme, esta está dada por

$$\begin{aligned} [l_m, l_n] &= (m - n) l_{m+n}, \\ [\bar{l}_m, \bar{l}_n] &= (m - n) \bar{l}_{m+n}, \\ [l_m, \bar{l}_n] &= 0. \end{aligned} \quad (4.2.13)$$

Esta álgebra es conocida como el álgebra de Witt. Dado que  $l'_m$ s y los  $\bar{l}'_n$ s conmutan, el álgebra local conforme es una suma directa de dos subálgebras isomorfas  $\Gamma \oplus \bar{\Gamma}$  con las relaciones de conmutación (4.2.13) [13]. Puesto que naturalmente surgen dos álgebras independientes, consideramos  $z$  y  $\bar{z}$  como variables independientes. Correspondiendo a  $z$  y  $\bar{z}$ , existen dos copias de esta álgebra, holomorfa y anti-holomorfa, respectivamente, así nuestra teoría conforme está definida en  $\mathbb{C}^2$  y es conveniente trabajar el sector holomorfo y tratar análogamente el sector anti-holomorfo.

El grupo de transformaciones conforme está bien definido, es invertible sobre la esfera de Riemann, y define el grupo conforme en 2 dimensiones. Este grupo es generado por los generadores infinitesimales  $\{l_{-1}, l_0, l_1\} \cup \{\bar{l}_{-1}, \bar{l}_0, \bar{l}_1\}$ . Si consideramos las transformaciones conforme finitas y (4.2.12), podemos identificar los generadores infinitesimales como:

$$\begin{aligned} l_{-1} \text{ y } \bar{l}_{-1} &\quad \text{como generadores de traslaciones,} \\ l_0 + \bar{l}_0 &\quad \text{como generador de dilataciones,} \\ i(l_0 - \bar{l}_0) &\quad \text{como generador de rotaciones,} \\ l_1 \text{ y } \bar{l}_1 &\quad \text{como generadores de transformaciones especiales conformes.} \end{aligned}$$

Notar que los generadores de dilatación y rotación son generadores de traslaciones de  $r$  y  $\theta$  en  $z = re^{i\theta}$  [30]. La forma finita de estas transformaciones es

$$\begin{aligned} z &\rightarrow \frac{az + b}{cz + d}, \quad \text{con } a, b, c, d \in \mathbb{C} \text{ y } ab - cd = 1, \\ \bar{z} &\rightarrow \frac{\bar{a}\bar{z} + \bar{b}}{\bar{c}\bar{z} + \bar{d}}, \quad \text{con } \bar{a}, \bar{b}, \bar{c}, \bar{d} \in \mathbb{C} \text{ y } \bar{a}\bar{b} - \bar{c}\bar{d} = 1. \end{aligned}$$

Este subgrupo es  $SL(2, \mathbb{C}) / \mathbb{Z}_2 \cong SO(3, 1)$ , y es conocido como el grupo de transformaciones proyectivas, estas son las únicas transformaciones invertibles de todo el espacio  $\mathbb{C}$  en si mismo. Llamaremos a este subgrupo: *grupo conforme global*.

### 4.3. Tensor de energía-momento en CFT

El tensor de energía-momento  $T_{\mu\nu}$  es de gran importancia en teoría de campos conforme por que junto con OPE determinan el comportamiento de la transformación de otros campos bajo transformaciones conformes. En una teoría de campos  $D$ -dimensional podemos definir el tensor de energía-momento via el teorema de Noether o como en (2.1.8), es decir una variación de la acción con respecto a la métrica:

$$\delta S = \frac{1}{2} \int d^D x \sqrt{-g} T^{\mu\nu} \delta g_{\mu\nu}. \quad (4.3.1)$$

En general las dos definiciones del tensor de energía-momento no coinciden, especialmente en que la definición via el teorema de Noether el tensor de energía-momento no tiene que ser simétrico, pero puede ser mediante la adición de la derivada de un tensor apropiado lo cual no afecta la conservación energía-momento, así en nuestra definición  $T^{\mu\nu}$  es simétrico y además sin traza, es decir  $T^\mu{}_\mu = 0$ . La conservación energía-momento implica que  $\partial_\mu T^{\mu\nu} = 0$ .

Lo que ahora nos interesa es el caso  $D = 2$ , enfocándonos en esto reescribimos el tensor de energía-momento en términos de coordenadas complejas, entonces usando el hecho de que  $T_{\mu\nu}$  es sin traza y simétrico tenemos que

$$T_{zz} = \frac{\partial x^\mu}{\partial z} \frac{\partial x^\nu}{\partial z} T_{\mu\nu} = \frac{1}{4}(T_{11} - T_{22} - 2iT_{12}) \quad (4.3.2)$$

$$T_{\bar{z}\bar{z}} = \frac{1}{4}(T_{11} - T_{22} + 2iT_{12}) \quad (4.3.3)$$

$$T_{z\bar{z}} = T_{\bar{z}z} = \frac{1}{4}T^\mu{}_\mu = 0. \quad (4.3.4)$$

Luego, utilizando la conservación del tensor de energía momento junto con la condición de no tener traza obtenemos

$$\partial_{\bar{z}} T_{zz} = 0 \quad \partial_z T_{\bar{z}\bar{z}} = 0, \quad (4.3.5)$$

lo cual implica que  $T(z) := T_{zz}(z)$  es holomorfa y  $\bar{T}(\bar{z}) = \bar{T}_{\bar{z}\bar{z}}$  es antiholomorfa. Entonces usando la fórmula integral de Cauchy dada por

$$f^{(n)}(\omega) = \frac{n!}{2\pi i} \oint \frac{f(z)}{(z - \omega)^{n+1}} dz, \quad (4.3.6)$$

podemos expandir  $T(z)$  de modo que se pueda expresar como una integral de contorno:

$$T(z) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} L_n \quad \text{donde} \quad L_n = \oint \frac{dz}{2\pi i} z^{n+1} T(z) \quad (4.3.7)$$

$$T(\bar{z}) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} z^{-n-2} \bar{L}_n \quad \text{donde} \quad \bar{L}_n = \oint \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{z}^{n+1} \bar{T}(\bar{z}) \quad (4.3.8)$$

El teorema de Noether implica que podemos asociar corrientes conservadas a simetrías continuas. En el caso de simetría conforme esta está dada por (4.2.8), y sabemos que es conservada por la ecuación (4.2.9).

Considerando  $D = 2$  la corriente puede ser escrita como

$$J_z = T_{zz}\epsilon(z), \quad J_{\bar{z}} = \bar{T}_{\bar{z}\bar{z}}\bar{\epsilon}(\bar{z}). \quad (4.3.9)$$

Con la conservación de esta corriente,  $\partial_{\bar{z}}J_z = \partial_zJ_{\bar{z}} = 0$ , podemos ver que  $J_z$  (y  $J_{\bar{z}}$ ) es holomorfa (anti-holomorfa respectivamente). Entonces las cargas conservadas están dadas por

$$Q_\epsilon = \int \frac{dz}{2\pi i} \epsilon(z)T(z) \quad y \quad Q_{\bar{\epsilon}} = \int \frac{d\bar{z}}{2\pi i} \bar{\epsilon}(\bar{z})\bar{T}(\bar{z}). \quad (4.3.10)$$

estos son los generadores de las transformaciones infinitesimales conforme en el sentido de

$$\delta_{\epsilon\bar{\epsilon}}\phi(\omega, \bar{\omega}) = [Q_\epsilon, \phi(\omega, \bar{\omega})] + [Q_{\bar{\epsilon}}, \phi(\omega, \bar{\omega})]. \quad (4.3.11)$$

## 4.4. Campos primarios y cuantización radial

Si consideramos (4.2.6), podemos ver que el elemento de línea  $ds^2 = dz d\bar{z}$  se transforma bajo  $z \rightarrow f(z)$  como

$$ds^2 \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) ds^2, \quad (4.4.1)$$

donde las funciones analíticas escalan como

$$dz \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right) dz, \quad d\bar{z} \rightarrow \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right) d\bar{z}. \quad (4.4.2)$$

Una generalización de esta ley de transformación esta dada por

$$\Phi(z, \bar{z}) \rightarrow \left(\frac{\partial f}{\partial z}\right)^h \left(\frac{\partial \bar{f}}{\partial \bar{z}}\right)^{\bar{h}} \Phi(f(z), \bar{f}(\bar{z})) \quad (4.4.3)$$

donde  $h$  y  $\bar{h}$  son números reales. Todo campo que se transforme bajo esta última relación es conocido como *Campo primario de peso conforme*  $(h, \bar{h})$ . Todos los otros campos son conocidos como campos secundarios.

Para estudiar la invarianza conforme en teoría cuantica de campos de dimension 2, debemos considerar las coordenadas Euclideas  $\sigma^1$  y  $\sigma^2$  como coordenadas temporal y espacial respectivamente y llevarlas al plano complejo. Las coordenadas complejas en espacio Euclideo vienen dadas por  $\xi = \sigma^1 + i\sigma^2$  y  $\bar{\xi} = \sigma^1 - i\sigma^2$ . Para eliminar divergencias, la coordenada espacial es compactificada como  $\sigma^2 \equiv \sigma^2 + 2\pi$ . Lo que resulta es un cilindro en

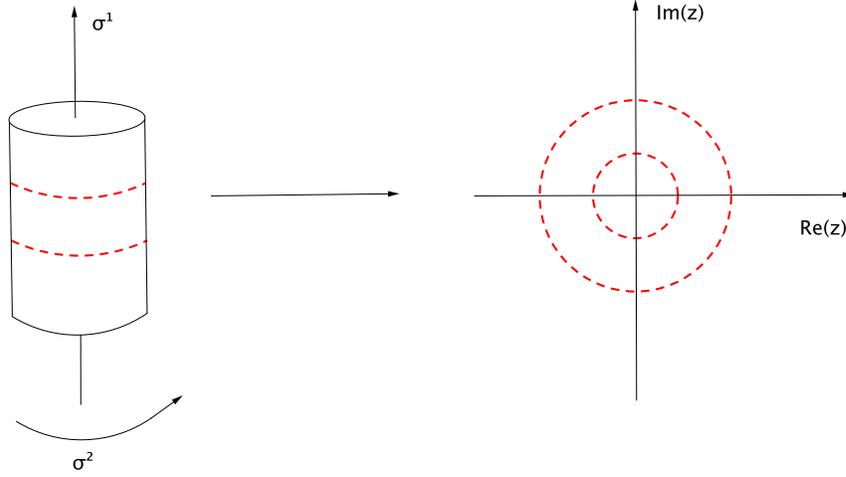


Figura 4.1: Mapeo desde el cilindro al plano complejo.

coordenadas  $(\sigma^1, \sigma^2)$ . Este cilindro puede ser llevado al plano complejo usando el mapeo conforme

$$\xi \rightarrow z = e^{(\sigma^1 + i\sigma^2)}, \quad \bar{\xi} \rightarrow \bar{z} = e^{(\sigma^1 - i\sigma^2)}, \quad (4.4.4)$$

como se puede ver en la figura 4.1. La superficie en el pasado infinito corresponde a  $z = 0$  y futuro infinito a  $z = \pm\infty$  en la extensión al plano complejo. Superficies de igual tiempo en el cilindro, es decir  $\sigma^1 = \text{constante}$ , vienen dados por círculos en el plano complejo centrados en  $z = 0$  [47].

Para una teoría de campos conforme sobre el  $z$ -plano, es interesante observar lo que ocurre con los operadores que ejecutan mapeos conformes, las dilataciones, por ejemplo,  $z \rightarrow e^a z$  son traslaciones temporales sobre el cilindro,  $\sigma^1 \rightarrow \sigma^1 + a$ . Debido a esto, el generador de dilatación,  $\frac{1}{2}(l_0 + \bar{l}_0)$ , sobre el plano complejo puede ser considerado como el Hamiltoniano para el sistema, y el espacio de Hilbert es construido sobre superficie de radio constante. Este procedimiento de definir una teoría cuántica en un plano, de la manera que lo hemos hecho, se conoce como *Cuantización radial*. En teoría de campos conforme 2-dimensional, se usa cuantización radial debido a que esta explota al máximo herramientas como integrales de contorno y análisis complejo para analizar expansiones a corta distancia, cargas conservadas, etc. [30].

## 4.5. OPE y el álgebra de Virasoro

Considerando que  $T$  y  $\bar{T}$  generan transformaciones locales conforme sobre el  $z$ -plano, la carga conservada en cuantización radial viene dada por

$$Q = \frac{1}{2\pi i} \oint \left( dz R(T(z)\varepsilon(z)) + d\bar{z} R(\bar{T}(\bar{z})\bar{\varepsilon}(\bar{z})) \right). \quad (4.5.1)$$

Esta integral de línea está definida sobre un círculo de radio fijo, y por convención, ambas integraciones  $dz$  y  $d\bar{z}$  se consideran en sentido contrario a las agujas del reloj. En el espacio euclidiano, la cuantificación radial de productos de los operadores  $A(z) B(w)$  se define para  $|z| > |w|$ . Este ordenamiento radial es el familiar al ordenamiento temporal en mecánica cuántica. El operador de ordenamiento radial  $R$  se define como

$$R(A(z)B(w)) = \begin{cases} A(z)B(w) & \text{si } |z| > |w| \\ B(w)A(z) & \text{si } |z| < |w|. \end{cases} \quad (4.5.2)$$

La variación de cualquier campo está dada por su conmutador con la carga (4.5.1)

$$\begin{aligned} \delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \Phi(w, \bar{w}) &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left( dz \varepsilon(z) [T(z), \Phi(w, \bar{w})] + d\bar{z} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) [\bar{T}(\bar{z}), \Phi(w, \bar{w})] \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \left( \oint_{|z| > |w|} - \oint_{|z| < |w|} \right) \left( dz \varepsilon(z) R(T(z)\Phi(w, \bar{w})) + d\bar{z} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) R(\bar{T}(\bar{z})\Phi(w, \bar{w})) \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint \left( dz \varepsilon(z) R(T(z)\Phi(w, \bar{w})) + d\bar{z} \bar{\varepsilon}(\bar{z}) R(\bar{T}(\bar{z})\Phi(w, \bar{w})) \right) \end{aligned} \quad (4.5.3)$$

La integración anterior es sobre un contorno de un radio determinado, pero estos pueden ser deformados, como en la figura 4.2, para tener una integración sobre un contorno cerrado.

Bajo una transformación infinitesimal conforme de la forma  $z \rightarrow z + \varepsilon(z)$ ,  $\bar{z} \rightarrow \bar{z} + \bar{\varepsilon}(\bar{z})$ , considerando (4.4.3) y (4.5.3) la variación de un campo primario  $\Phi$ ,  $\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \Phi(w, \bar{w})$  es

$$\delta_{\varepsilon, \bar{\varepsilon}} \Phi(w, \bar{w}) = \left( (h\partial_w \varepsilon(w) + \varepsilon(w)\partial_w) + (\bar{h}\bar{\partial}_{\bar{w}} \bar{\varepsilon}(\bar{w}) + \bar{\varepsilon}(\bar{w})\bar{\partial}_{\bar{w}}) \right) \Phi(w, \bar{w}) \quad (4.5.4)$$

Notar que para obtener el resultado esperado hemos aplicado también la fórmula de la integral de Cauchy dada por (4.3.6).

Si comparamos este resultado con (4.5.3), podemos inferir la *Expansión en producto de operadores*, *OPE* (esta sigla viene dada por su versión en inglés: Operator Product Expansion) de un campo primario con el tensor de energía momento usando el teorema

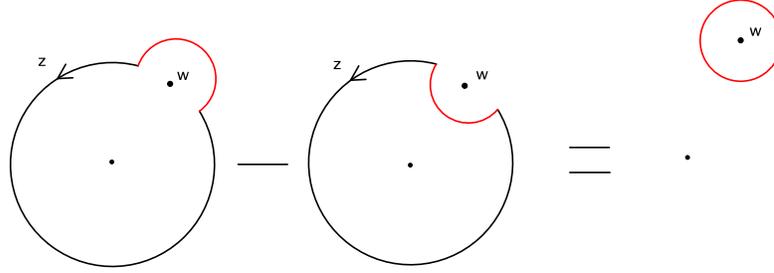


Figura 4.2: Diferencia de la integración sobre contorno cerrado dibujado alrededor del origen y excluyendo el punto en  $w$ . El resultado es una única integral de contorno alrededor del punto  $w$ .

del residuo:

$$R(T(z)\Phi(w, \bar{w})) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\Phi(w, \bar{w}) + \dots \quad (4.5.5)$$

$$R(\bar{T}(\bar{z})\Phi(w, \bar{w})) = \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})}\partial_{\bar{w}}\Phi(w, \bar{w}) + \dots$$

Las OPEs (4.5.6) se pueden utilizar como una definición alternativa de un campo primario [47]. El símbolo  $R$  lo dejaremos de utilizar a partir de ahora, y asumiremos la expansión en producto de operadores es radialmente ordenada. Las OPEs entonces se convierten en [30]:

$$T(z)\Phi(w, \bar{w}) = \frac{h}{(z-w)^2}\Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w\Phi(w, \bar{w}) + \dots \quad (4.5.6)$$

$$\bar{T}(\bar{z})\Phi(w, \bar{w}) = \frac{\bar{h}}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\Phi(w, \bar{w}) + \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})}\partial_{\bar{w}}\Phi(w, \bar{w}) + \dots$$

De particular interés es la OPE del tensor de energía momento con sí mismo y como determina propiedades de  $T(z)$  bajo una transformación conforme. Esta esta dada por

$$T(z)T(w) = \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2}T(w) + \frac{1}{(z-w)}\partial_w T(w) \quad (4.5.7)$$

$$\bar{T}(\bar{z})\bar{T}(\bar{w}) = \frac{\bar{c}/2}{(\bar{z}-\bar{w})^4} + \frac{2}{(\bar{z}-\bar{w})^2}\bar{T}(\bar{w}) + \frac{1}{(\bar{z}-\bar{w})}\partial_{\bar{w}}\bar{T}(\bar{w})$$

donde  $c$  es una constante y resulta ser la carga central.

En la sección 4.3, hemos definido la expansion de Laurent del tensor de energía momento en términos de los generadores  $L_n$  y viceversa (4.3.7). Las relaciones de conmutación

de estos operadores, y por lo tanto el álgebra que generan, pueden ser determinados conociendo las OPEs entre los operadores. Consideremos los campos holomorfos  $a(z)$  y  $b(w)$  y la integral

$$\oint_{C_w} dz a(z)b(w) \quad (4.5.8)$$

donde la integración es sobre el contorno de círculos en sentido antihorario alrededor de  $w$ , y suponemos un ordenamiento radial de los campos (4.5.2), tal como lo hemos hecho hasta ahora. Esta integral se puede dividir en dos como la diferencia de dos integraciones de contornos en direcciones opuestas, esto nos da el conmutador:

$$\begin{aligned} \oint_{C_w} dz a(z)b(w) &= \oint_{C_1} dz a(z)b(w) - \oint_{C_2} dz b(w)a(z) \\ &= [A, b(w)] \end{aligned} \quad (4.5.9)$$

donde  $A$  esta definido como la integral de contorno  $A = \oint a(z) dz$ , y  $C_1$  y  $C_2$  son contornos de tiempo fijo alrededor del origen.

Si consideramos tambien  $B = \oint b(z) dz$ , el conmutador de dos operadores,  $[A, B]$ , que son integrales de campos holomorfos, se puede determinar integrando (4.5.9) alrededor de  $w$  [14]:

$$[A, B] = \oint_{C_o} dw \oint_{C_w} dz a(z)b(w). \quad (4.5.10)$$

Este conmutador (4.5.10) lo evaluamos sustituyendo las OPEs de un  $a(z)$  y  $b(w)$ , de los cuales sólo términos en  $1/(z-w)$  contribuyen, por el teorema de los residuos [14].

Ahora tenemos las herramientas necesarias para escribir el álgebra de los generadores conforme en la teoría cuantizada, es decir los conmutadores de los  $L_n$ s del tensor de energía moneto definidos en (4.3.7). Usando la relación (4.5.10) y la OPE (4.5.8):

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= \left[ \frac{1}{2\pi i} \oint dz T(z)z^{n+1}, \frac{1}{2\pi i} \oint dw T(w)w^{m+1} \right] \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dw w^{m+1} \frac{1}{2\pi i} \oint_{C_w} dz z^{n+1} \left( \frac{c/2}{(z-w)^4} + \frac{2}{(z-w)^2} T(w) + \frac{\partial_w T(w)}{(z-w)} \right) \\ &= \frac{1}{2\pi i} \oint dw w^{m+1} \left( \frac{c}{12} w^{n-2} (n^3 - n) + 2(n+1)T(w)w^n + w^{n+1} \partial_w T(w) \right) \\ &= \frac{c}{12} (n^3 - n) \delta_{n+m,0} + 2(n+1)L_{m+n} - \frac{1}{2\pi i} \oint dw w^{n+m+2} \partial_w T(w) \end{aligned}$$

donde  $C_w$  es un pequeño círculo alrededor de  $w$ , mientras que la integral sobre  $dw$  es alrededor del origen. Después de la integración por partes la última integral contribuye a

$L_{m+n}$ . Aplicando el mismo procedimiento los generadores antiholomorfos obtenemos

$$\begin{aligned} [L_n, L_m] &= (n-m)L_{n+m} + \frac{c}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}, \\ [\bar{L}_n, \bar{L}_m] &= (n-m)\bar{L}_{n+m} + \frac{\bar{c}}{12}(n^3-n)\delta_{n+m,0}, \\ [[L_n, \bar{L}_m] &= 0. \end{aligned} \tag{4.5.11}$$

Nos encontramos con dos copias de un álgebra de dimensión infinita llamada *álgebra de Virasoro*. Esta depende de la carga central de la teoría de campos conforme (usualmente  $c = \bar{c}$ ). Las relaciones de conmutación entre  $L_{\pm 1}$  y  $L_0$  no dependen de la carga central, y concuerdan con las conmutaciones clásicas entre  $l_{\pm 1}$  y  $l_0$ . La razón de esto es que generan las transformaciones globales.



# Capítulo 5

## Fórmula de Cardy

La fórmula de Cardy nos entrega la entropía de una teoría de campos conforme bidimensional. Analizaremos en este capítulo todos los antecedentes necesarios para poder obtenerla. Invarianza modular y la función de partición son revisadas con el fin de entender uno de los resultados principales de Cardy que implica una invarianza modular de una función de partición para poder derivar esta fórmula para la entropía. Revisaremos el resultado el Brown-Hennaux y veremos uno de los resultados de Strominger el cual fue calcular la entropía de un agujero negro BTZ utilizando tanto la fórmula de Cardy como el postulado de Brown y Hennaux.

### 5.1. Invarianza Modular

Hasta ahora hemos visto teoría de campos conforme sobre el plano complejo el cual es, agregándole un punto en el infinito, topológicamente equivalente a la esfera de Riemann, asignándole así a esta la representación geométrica de los números complejos. La esfera de Riemann es una superficie de Riemann de género  $g = 0$ . En la teoría de fenómenos críticos el caso  $g = 1$  es de relevancia física ya que el toro es equivante a un plano con condiciones de borde periódicas en dos direcciones.

Entonces, si consideramos el caso  $g = 1$ , estamos hablando de teoría de campos conforme sobre el toro. La forma más conveniente de representar un toro para usarlo en teoría de campos conforme es en términos de un plano complejo módulo un lattice. Así podemos ver el toro como un paralelogramo con vértices  $(0, 1, \tau, \tau + 1)$  con sus lados opuestos identificados, esto es sobre el plano complejo obtener el toro identificando  $\omega \sim \omega + n + m\tau$  donde  $\tau = \tau_1 + i\tau_2 \in \mathbb{C}$  con  $\tau_1, \tau_2 \in \mathbb{R}$ ,  $n, m \in \mathbb{Z}$ . El lattice es visto en la figura 5.1. Esta construcción nos da una estructura compleja sobre el toro la cual es necesaria para

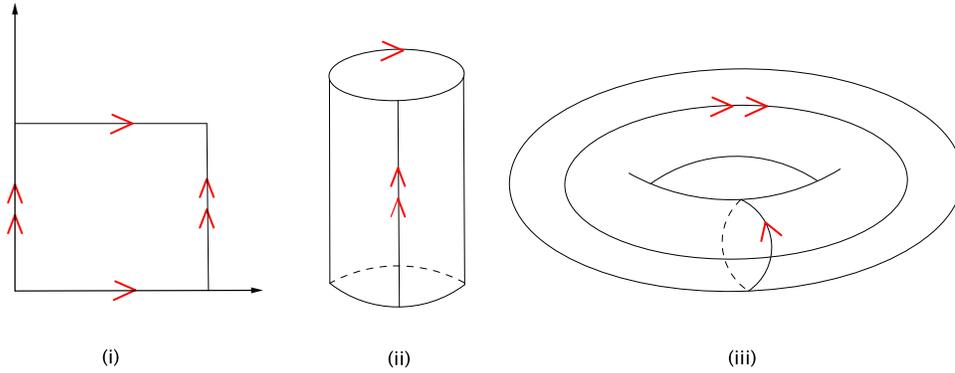


Figura 5.1: (i) Representación de un toro en una región rectangular del  $z$ -plano complejo con identificaciones. (ii) Pegando los lados verticales de la región rectangular obtenemos un cilindro. (iii) Pegando la parte superior con la parte inferior del cilindro (que correspondían a los lados horizontales de la región rectangular) obtenemos un toro.

definir una teoría de campos conforme sobre este. El parámetro  $\tau$  que parametriza el toro es llamado *parámetro modular*.

El grupo de transformaciones del parámetro modular  $\tau$  que dan lugar a la misma estructura compleja del toro son llamadas *transformaciones modulares*. El lattice generado por 1 y  $\tau$  está dada por  $\{m \cdot 1 + n \cdot \tau \mid m, n \in \mathbb{Z}\}$ . De manera clara podemos ver que obtenemos el mismo lattice si reemplazamos  $\tau$  por  $\tau + 1$ , lo cual corresponde a la transformación modular  $\mathcal{T} : \tau \rightarrow \tau + 1$ .

Se podría también considerar un paralelogramo equivalente formado por  $(0, \tau, \tau + 1, 2\tau + 1)$ . Para traer esto a la forma convencional con un vértice en el 1, tenemos que multiplicar por  $\frac{1}{\tau + 1}$  lo cual deja la estructura compleja del toro invariante. Todo esto nos lleva a un toro con parámetro modular  $\frac{\tau}{\tau + 1}$ .

Si consideramos  $\mathcal{U} : \tau \rightarrow \frac{\tau}{\tau + 1}$ , las transformaciones  $\mathcal{T}$  y  $\mathcal{U}$  generan un grupo de transformaciones, conocido con *grupo modular*, dado por

$$\tau \rightarrow \frac{a\tau + b}{c\tau + d}, \quad \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{Z}) \quad (5.1.1)$$

donde  $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$ , y  $ad - bc = 1$ . Como  $\tau$  es invariante bajo cambios de signo de  $a, b, c, d$  en (5.1.1), el grupo modular es  $SL(2, \mathbb{Z}) / \mathbb{Z}_2$ .

En lugar de la transformación modular antes mencionada  $\mathcal{U} : \tau \rightarrow \frac{\tau}{\tau+1}$ , por convención se considera la combinación  $\mathcal{S} = \mathcal{T}^{-1} \mathcal{U} \mathcal{T}^{-1} : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ . Luego,  $\mathcal{S}$  y  $\mathcal{T}$  pueden ser representados explícitamente como:

$$\mathcal{T} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{S} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.1.2)$$

Las dos transformaciones modulares

$$\mathcal{T} : \tau \rightarrow \tau + 1 \quad \text{y} \quad \mathcal{S} : \tau \rightarrow -\frac{1}{\tau} \quad (5.1.3)$$

$$\text{con } (\mathcal{ST})^3 = 1, \quad \mathcal{S}^2 = 1$$

generan el *grupo modular del toro*. Un elemento general está dado por (5.1.1).

Entonces, en el proceso de llevar del plano al toro, el único parámetro a considerar es el parámetro modular  $\tau$ .

## 5.2. Función de Partición

Se busca ahora una función de partición (es decir el vacío funcional, en el espacio de Minkowski). Una función de partición es usada para describir propiedades estáticas de un sistema en equilibrio termodinámico, tales como presión, entropía (grados de libertad), energía libre y energía total.

Se le llama ensamble canónico, al conjunto de los posibles estados de un sistema (conjunto de partículas) que intercambia energía térmica con el ambiente, pero no materia. El volumen que ocupa y su número de partículas es constante, además en el equilibrio, el sistema permanece a temperatura constante, y se puede considerar que está en contacto térmico con un baño térmico. En el ensamble canónico la función de partición está dada por

$$\mathcal{Z} = \sum_n e^{-\beta E_n}. \quad (5.2.1)$$

La suma anterior (5.2.1) se ha realizado sobre los  $n$  de microestados,  $E_n$  representa la energía del microestado  $n$  y  $\beta$  se define como  $\beta = \frac{1}{\kappa_B T}$ , donde  $\kappa_B$  es la constante de Boltzman. Como las energías del sistema son valores propios del Hamiltoniano, podemos escribir (5.2.1) como

$$\mathcal{Z} = \text{Tr } e^{-\beta H}, \quad (5.2.2)$$

y cuya generalización, al verlo como una función del parámetro modular  $L \cdot \tau$ , viene dado por

$$Z(\tau) = \text{Tr} e^{-\tau_2 LH} e^{-\tau_1 LP}. \quad (5.2.3)$$

Aquí el Hamiltoniano  $H$  genera una traslación a lo largo del eje imaginario y el operador momento  $P$  genera una traslación en el eje real del plano complejo. Tanto  $H$  como  $P$  son generadores de traslaciones en el tiempo ( $\tau$ ) y el espacio ( $\sigma$ ) respectivamente [47]. Notar además que estamos tratando el toro como la identificación de los extremos abiertos de un cilindro finito de circunferencia  $L$  [30].

Queremos ahora, encontrar expresiones para el Hamiltoniano y el operador momento sobre el cilindro en términos de los generadores del álgebra de Virasoro en el plano, estos pueden ser calculados a partir del tensor de energía momento [48] vía

$$H = \frac{1}{2\pi} \int_0^L d\sigma T_{\tau\tau}^*(\sigma) \quad \text{y} \quad P = \frac{1}{2\pi} \int_0^L d\sigma T_{\tau\sigma}^*(\sigma) \quad (5.2.4)$$

donde  $T^*$  representa el tensor de energía momento sobre el cilindro. Usando (4.5.8) y (4.5.3) podemos ver [47] que las expresiones para  $H$  y  $P$  en términos de los generadores  $L_0$  y  $\bar{L}_0$  son

$$H = \frac{2\pi}{L} \left( (L_0 - \frac{c}{24}) + (\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}) \right) \quad \text{y} \quad (5.2.5)$$

$$P = -\frac{2\pi i}{L} \left( (L_0 - \frac{c}{24}) - (\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}) \right). \quad (5.2.6)$$

Así para la expresión (5.2.3), la función de partición viene dada por

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} e^{2\pi i \tau (L_0 - \frac{c}{24}) - 2\pi i \bar{\tau} (\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24})} \quad (5.2.7)$$

$$= \text{Tr} q^{L_0 - \frac{c}{24}} \bar{q}^{\bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}} \quad (5.2.8)$$

$$= q^{-\frac{c}{24}} \bar{q}^{-\frac{\bar{c}}{24}} \text{Tr} q^{L_0} \bar{q}^{\bar{L}_0}, \quad (5.2.9)$$

donde  $q = e^{2\pi i \tau}$  y  $\bar{q} = e^{-2\pi i \bar{\tau}}$ .

La función de partición es modularmente invariante bajo la transformación  $T$  y puede ser utilizada para derivar la fórmula de Cardy.

### 5.3. Derivación de la fórmula de Cardy

En ensamble microcanónico, un sistema termodinámico aislado que mantiene el número de partículas  $N$ , volumen  $V$  y energía total  $E$  constantes, la entropía es esencialmente el

logaritmo de la densidad de estados  $\rho(E)$ . Para determinar esta cantidad usaremos uno de los resultados de Cardy: manipularemos la invarianza modular de la función de partición de una teoría de campos conforme bidimensional. Utilizaremos de referencia la derivación hecha por Carlip [49, 50].

Comenzamos con una teoría conforme de campos con carga central  $c$ , con el álgebra de Virasoro estandar (4.5.11). Un resultado básico de Cardy es que la cantidad

$$Z_0(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} e^{2\pi i(L_0 - \frac{c}{24})\tau} e^{-2\pi i(\bar{L}_0 - \frac{c}{24})\bar{\tau}} \quad (5.3.1)$$

es invariante bajo transformaciones modulares, en particular invariante bajo la transformación  $\tau \rightarrow -\frac{1}{\tau}$ . Ahora, la función de partición en el toro del módulo  $\tau = \tau_1 + i\tau_2$  es

$$Z(\tau, \bar{\tau}) = \text{Tr} e^{2\pi i\tau L_0} e^{-2\pi i\bar{\tau}\bar{L}_0} = \sum \rho(\Delta, \bar{\Delta}) e^{2\pi i\Delta\tau} e^{-2\pi i\bar{\Delta}\bar{\tau}}. \quad (5.3.2)$$

donde  $\rho$  es el número de estados con valores propios  $\Delta, \bar{\Delta}$  para los generadores del álgebra de Virasoro  $L_0, \bar{L}_0$ .

Ahora podemos determinar  $\rho$  de  $Z$  por integración de contorno. Consideraremos  $\tau$  y  $\bar{\tau}$  como variables independientes complejas (esto no es necesario, pero simplifica el cálculo), hacemos

$$q = e^{2\pi i\tau}, \quad \bar{q} = e^{2\pi i\bar{\tau}}$$

y entonces

$$\rho(\Delta, \bar{\Delta}) = \frac{1}{(2\pi i)^2} \oint \frac{dq}{q^{\Delta+1}} \frac{d\bar{q}}{\bar{q}^{\bar{\Delta}+1}} Z(q, \bar{q}). \quad (5.3.3)$$

Vamos dejar la dependencia de  $\bar{\tau}$ , solo para simplificar la notación, y volveremos a ella solo al final del cálculo. Un punto importante a tener en cuenta es que

$$Z(\tau) = e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} Z_0(\tau). \quad (5.3.4)$$

Utilizaremos la invarianza modular de  $Z_0$  para volver a escribir la integral de contorno en una forma adecuada para una aproximación a través del método de punto de silla:

$$Z(\tau) = e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} Z_0(-1/\tau) = e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} e^{\frac{2\pi ic}{24}\frac{1}{\tau}} Z(-1/\tau) \quad (5.3.5)$$

y así

$$\rho(\Delta) = \int d\tau e^{-2\pi i\Delta\tau} e^{\frac{2\pi ic}{24}\tau} e^{\frac{2\pi ic}{24}\frac{1}{\tau}} Z(-1/\tau). \quad (5.3.6)$$

La clave para una aproximación de punto de silla es separar el integrando en una fase que varía rápidamente y un prefactor de variación lenta.  $Z(-1/\tau)$  varía lentamente cerca del valor extremo de la fase. Para valores grandes de  $\Delta$ , el valor extremo del exponente es

$$\tau \approx i\sqrt{c/24\Delta}. \quad (5.3.7)$$

Sustituyendo (5.3.7) dentro de la integral, obtenemos

$$\rho(\Delta) \approx \exp\left\{2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}}\right\} + \text{términos de orden mayor}, \quad (5.3.8)$$

Considerando ahora la dependencia de  $\tau$  y  $\bar{\tau}$  del término exponencial de (5.3.8) y tomando el logaritmo natural, tenemos que

$$S = \ln \rho(\Delta, \bar{\Delta}) = 2\pi\sqrt{\frac{c\Delta}{6}} + 2\pi\sqrt{\frac{\bar{c}\bar{\Delta}}{6}} \quad (5.3.9)$$

expresión que se conoce como la *Fórmula de Cardy estándar*.

## 5.4. Simetrías asintóticas (Brown-Henneaux)

En relatividad general, el concepto de simetría asintótica, o simetría global, juega un rol fundamental. Las simetrías asintóticas son por definición aquellas transformaciones de gauge que dejan las configuraciones del campo bajo consideración asintóticamente invariante [18], teniendo en cuenta que una transformación de gauge es una transformación de algún grado de libertad interno, que no modifica ninguna propiedad observable física.

En el año 1986 Brown y Henneaux [18], consideraron el espacio Anti de Sitter (AdS<sub>3</sub>) en tres dimensiones, estudiaron sus simetrías asintóticas y encontraron que ellas forman dos copias del álgebra de Virasoro con carga central  $c = \frac{3l}{2G}$ .

Para estudiar este resultado, consideraremos una teoría gravitatoria en tres dimensiones acoplada a materia, siguiendo [17], esto está descrito por la acción

$$S = \frac{1}{16\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left( R + \frac{2}{l^2} \right) + S_m, \quad (5.4.1)$$

donde  $S_m$  es la acción de materia, la constante cosmológica es  $\Lambda = -\frac{1}{l^2}$  y se han omitido términos de superficie. La acción de materia no va a jugar un papel importante, pero lo incluimos aquí para subrayar la generalidad de estas consideraciones. Nos interesa una descripción semiclásica, la cual requiere que la constante cosmológica sea pequeña en unidades de Planck, es decir  $l \gg G$ . Para la acción (5.4.1) tenemos la solución

$$ds^2 = - \left( \frac{r^2}{l^2} + 1 \right) dt^2 + \left( \frac{r^2}{l^2} + 1 \right)^{-1} dr^2 + r^2 d\phi^2, \quad (5.4.2)$$

donde  $\phi$  tiene periodo  $2\pi$ . Con el fin de definir una teoría cuántica sobre  $\text{AdS}_3$ , debemos especificar condiciones de frontera en el infinito, esto es [18]

$$\begin{aligned} g_{tt} &= -\frac{r^2}{l^2} + \mathcal{O}(1), \\ g_{t\phi} &= \mathcal{O}(1), \\ g_{tr} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ g_{rr} &= \frac{l^2}{r^2} + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ g_{r\phi} &= \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^3}\right), \\ g_{\phi\phi} &= r^2 + \mathcal{O}(1). \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Los difeomorfismos permitidos son generados por campos vectoriales  $\zeta^\mu(r, t, \phi)$  los cuales preservan (5.4.3). Estos son de la forma

$$\begin{aligned} \zeta^t &= \ell(T^+ + T^-) + \frac{\ell^3}{2r^2}(\partial_+^2 T^+ + \partial_-^2 T^-) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ \zeta^\phi &= T^+ - T^- - \frac{\ell^2}{2r^2}(\partial_+^2 T^+ - \partial_-^2 T^-) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r^4}\right), \\ \zeta^r &= -r(\partial_+ T^+ + \partial_- T^-) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{r}\right), \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

donde  $2\partial_\pm \equiv l\frac{\partial}{\partial t} \pm \frac{\partial}{\partial\phi}$  y preservar (5.4.3) requiere que  $T^\pm$  dependa de  $r$ ,  $\phi$  y  $t$  como  $T^\pm(r, t, \phi) = T^\pm\left(\frac{t}{\ell} \pm \phi\right)$  tal que  $\partial_\pm T^\mp = 0$ .

Difeomorfismos con  $T^\pm = 0$  caen rápidamente en el infinito y deben ser considerados “transformaciones de gauge puras”. Los difeomorfismos con  $T^\pm$  distinto de cero, módulo transformaciones de gauge puras, comprenden el grupo de simetría asintótica. Denotando los generadores de estos difeomorfismos como  $L_n$  y  $\bar{L}_n$ , con  $-\infty < n < \infty$ , donde  $L_n$  y  $\bar{L}_n$  generan los difeomorfismos con  $T^+ = e^{in\left(\frac{t}{\ell} + \phi\right)}$  y  $T^- = e^{in\left(\frac{t}{\ell} - \phi\right)}$  respectivamente. Estos generadores obedecen

$$\begin{aligned} [L_m, L_n] &= (m-n)L_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\ [\bar{L}_m, \bar{L}_n] &= (m-n)\bar{L}_{m+n} + \frac{c}{12}(m^3 - m)\delta_{m+n,0}, \\ [L_m, \bar{L}_n] &= 0, \end{aligned} \quad (5.4.5)$$

con

$$c = \frac{3l}{2G}, \quad (5.4.6)$$

donde (5.4.5) es por supuesto el álgebra de Virasoro (4.5.11). Dado que los estados físicos de la gravedad cuántica sobre  $\text{AdS}_3$  deben formar una representación de esta álgebra, tenemos que: *cualquier teoría cuántica gravitatoria en  $\text{AdS}_3$  es una teoría conforme de campos en dos dimensiones con carga central* (5.4.6.)

## 5.5. Fórmula de Cardy para el agujero negro BTZ

Strominger [17], considerando la carga central de Brown-Henneaux demostró que la entropía de un agujero negro BTZ, visto en el capítulo 2, obtenida a través de la fórmula de Cardy, coincide con la entropía de Bekenstein-Hawking. Sabemos que el agujero negro BTZ es una solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío con constante cosmológica  $\Lambda = -1/l^2$ . El espacio-tiempo asintóticamente BTZ es asintóticamente  $\text{AdS}_3$  donde su simetría asintótica se rige por dos copias del álgebra de Virasoro con carga central

$$c = \bar{c} = \frac{3l}{2G}. \quad (5.5.1)$$

Como mencionamos en la sección 4.2, dilataciones y rotaciones están generadas por  $L_0 + \bar{L}_0$  y  $L_0 - \bar{L}_0$  respectivamente. Para la métrica BTZ las dilataciones corresponden a la masa  $M$  y las rotaciones al momento angular  $J$ . En términos de los valores propios de los generadores del álgebra de Virasoro,  $M$  y  $J$  están dados por

$$Ml = \Delta + \bar{\Delta} \quad J = \Delta - \bar{\Delta}. \quad (5.5.2)$$

Invirtiendo estas relaciones encontramos expresiones para los valores propios

$$\Delta = \frac{Ml + J}{2} \quad \bar{\Delta} = \frac{Ml - J}{2}. \quad (5.5.3)$$

Con esta estructura, podemos estudiar la termodinámica de un agujero negro BTZ, ver que cumple con la primera ley de la termodinámica (3.1.1) es importante, pero específicamente lo que nos interesa a nosotros es la entropía, la cual calcularemos para un agujero negro BTZ, en sus versiones no rotante y rotante, a través de la fórmula de Cardy (5.3.9) [30].

En un agujero negro BTZ no rotante ( $J = 0$ ), la expresión para su masa está dada por

$$M = \frac{r_+^2}{18Gl^2}, \quad (5.5.4)$$

la cual al sustituirla en (6.3.10) nos dan valores para los generadores del álgebra de Virasoro:

$$\Delta = \bar{\Delta} = \frac{r_+^2}{16Gl}. \quad (5.5.5)$$

Así usando (5.5.1) y (5.5.5), la fórmula de Cardy (5.3.9) nos da

$$S = \frac{2\pi r_+}{4g}, \quad (5.5.6)$$

la cual corresponde a la entropía de Bekenstein-Hawking (3.3.2).

Para el caso BTZ rotante, las expresiones que determinan su masa y momento angular son

$$M = \frac{r_+^2 + r_-^2}{8Gl^2} \quad J = \frac{r_+ r_-}{4Gl}. \quad (5.5.7)$$

Sustituyendo estas en (6.3.10) y simplificando tenemos

$$\Delta = \frac{(r_+ + r_-)^2}{16Gl} \quad \bar{\Delta} = \frac{(r_+ - r_-)^2}{16Gl}, \quad (5.5.8)$$

los cuales al reemplazarlos en (5.3.9) obtenemos que nuestra entropía calculada por la fórmula de Cardy corresponde también a la entropía de Bekenstein-Hawking (3.3.2) para agujeros negros BTZ rotantes, tal como se esperaba.



## Capítulo 6

# Métricas anisotrópicas

### 6.1. Correspondencia AdS/CFT no relativista

Durante la última década, ha existido un cierto interés en extender las ideas relacionadas a la correspondencia relativista estándar AdS/CFT [19] a la física no relativista con el fin de obtener una mejor comprensión de la física de materia condensada, y particularmente de sistemas físicos que exhiben una escala dinámica cerca de puntos fijos. Estos últimos se caracterizan por una invariancia bajo una simetría de reescalamiento con diferentes pesos entre el espacio y el tiempo, lo que se lee

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}. \quad (6.1.1)$$

La constante  $z$  se denomina exponente dinámico y refleja la simetría anisotrópica. En analogía con el caso de AdS, la métrica dual de gravedad en  $D$ -dimensional (también conocida como la *métrica de Lifshitz* [22]) esta dada por

$$ds^2 = - \left(\frac{r}{l}\right)^{2z} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \quad (6.1.2)$$

podemos ver que la transformación anisotrópica de escala (6.1.1) junto con la regla  $r \rightarrow \lambda^{-1}r$  actúan como isometría para esta métrica.

Poco tiempo después de la introducción de la métrica base de Lifshitz (Lifshitz background) (6.1.2), se observó que, en contraste con el caso estándar de AdS  $z = 1$ , esta métrica no es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, y en su lugar requiere la introducción de alguna fuente de materia o considerar términos de curvatura de orden superior [22]. Efectos de temperatura finita se introducen por medio de agujeros negros tipo Lifshitz, es decir, a métricas de agujero negro cuyo comportamiento asintótico reproduce la

métrica base de Lifshitz (6.1.2). Hasta ahora, se han reportado una variedad relativamente importante de soluciones de agujeros negros tipo Lifshitz en la literatura actual, por ejemplo, para la teoría nueva gravedad masiva en tres dimensiones introducida en [45], existe una solución de agujero negro tipo Lifshitz con exponente dinámico  $z = 3$  [51]. Generalizaciones a dimensión mayor de esta solución en el vacío se han derivado en [52] para correcciones cuadráticas más generales de la gravedad de Einstein. En teorías gravitatorias conformes en cuatro dimensiones, se construyeron agujeros negros tipo Lifshitz para exponentes dinámicos  $z = 0$  y  $z = 4$  en [53] y sus versiones cargadas eléctricamente han sido recientemente estudiadas en [54]. Agujeros negros tipo Lifshitz para las teorías cúbicas han sido investigados en [55] así como para contracciones del tensor de Weyl [56]. Se han obtenido ejemplos de soluciones de agujero negro tipo Lifshitz cargadas en presencia de fuentes abelianas [57, 58], en el caso de una teoría de Maxwell-Proca [59] o más generalmente para la electrodinámica no lineal [60].

Existen teorías provistas de lo que se llama un *hiperescalamiento*, en estas teorías la entropía  $S$  escala con la temperatura  $T$  como  $S \sim T^{d-2}$ , y en caso de Lifshitz el hiperescalamiento está dado por

$$S \sim T^{\frac{d-2}{z}}, \quad (6.1.3)$$

donde debemos notar que  $d - 2$  la dimensionalidad espacial y  $z$  el exponente dinámico.

Una violación a esta ley (6.1.3) surge al considerar las llamadas transiciones de fase cuánticas, las cuales son transiciones que se producen entre dos fases diferentes a temperatura cero. Esta violación al hiperescalamiento se refleja en el hecho de que la entropía varía con respecto a la temperatura como [61–63]

$$S \sim T^{\frac{d_{\text{eff}}}{z}}, \quad (6.1.4)$$

donde a  $d_{\text{eff}}$  es la dimensionalidad espacial efectiva, y donde  $z$  es el exponente dinámico responsable de la anisotropía del sistema (6.1.1). En el caso Lifshitz, la dimensionalidad espacial efectiva tiene un valor fijo que depende de la dimensión, este es  $d_{\text{eff}} = D - 2$ .

Estos sistemas son descritos por la llamada métrica de violación al hiperescalamiento cuyo elemento de línea está relacionado con la métrica de Lifshitz como

$$ds^2 = \frac{1}{r^{\frac{2\theta}{D-2}}} \left[ - \left( \frac{r}{l} \right)^{2z} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2 \right], \quad (6.1.5)$$

donde ahora las transformaciones (6.1.1) junto con  $r \rightarrow \lambda^{-1}r$  actúan más bien como una transformación conforme,  $ds^2 \rightarrow \lambda^{2\theta/(D-2)} ds^2$ . Ejemplos de agujeros negros de violación al hiperescalamiento son conocidos en la literatura [64–69]. Como se muestra a continuación,

en el caso de violación al hiperescalamiento, la dimensionalidad espacial efectiva dependerá explícitamente del exponente de violación al hiperescalamiento  $\theta$ , y esta dependencia variará en función de la teoría de gravedad considerada. Por ejemplo, en el caso de la gravedad de Einstein estándar tridimensional con fuente, tenemos  $d_{\text{eff}} = 1 - \theta$  [68], mientras que para teorías de gravedad cuadráticas (o cúbicas) en tres dimensiones tendremos  $d_{\text{eff}} = 1 + \theta$  (respectivamente  $d_{\text{eff}} = 1 + 3\theta$ ).

## 6.2. Rotación de Wick

La rotación de Wick es un instrumento muy útil en teoría cuántica de campos. Por medio de una rotación del eje el tiempo  $t$  se reemplaza por  $i\tau$ . Esto convierte el espacio de Minkowsk en espacio euclideo. Su utilidad proviene de que ciertas expresiones (tales como integrales de camino) están mejor definidas en la teoría euclidea. La rotación de Wick es una herramienta bien controlada en teoría cuántica de campos, por lo menos siempre y cuando uno la aplique al espacio-tiempo plano (o estacionario). La idea de aplicar la rotación de Wick al espacio de las métricas lorentzianas (para obtener el espacio de las métricas euclideas) es muy interesante e ingeniosa; sin embargo, constituye un procedimiento muy diferente al de aplicar una rotación de Wick en la teoría cuántica de campos. Es realmente una rotación de Wick en un nivel muy distinto [70].

En  $D$  dimensiones, es decir considerando las coordenadas  $(t, x^1, x^2, \dots, x^{D-1})$ , este procedimiento requiere una elección de  $t$  y rompe la covarianza de Lorentz. Así, el proceso de *Rotación de Wick* debe ser visto de la siguiente manera [71]:

- Comenzamos con una teoría en el espacio de Minkowski  $D$ -dimensional con coordenadas  $x^\mu$ , simetría del grupo especial ortogonal  $SO(1, D - 1)$  y métrica  $\eta_{\mu\nu} = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ .
- Seleccionamos una coordenada temporal  $t$  tal que tengamos coordenadas  $(t, x^1, x^2, \dots, x^{D-1})$ .
- Realizamos la rotación de Wick:  $t \rightarrow i\tau$ .
- El resultado es una teoría en el espacio euclidiano  $D$ -dimensional. Debemos notar que las únicas rotaciones espaciales tangentes permitidas son el grupo  $SO(D - 1)$  heredado de la teoría de Minkowski.

Así, si consideramos el espacio de Minkowski en cuatro dimensiones

$$ds^2 = -dt^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \tag{6.2.1}$$

y la métrica euclidea 4-dimensional

$$ds^2 = d\tau^2 + dx^2 + dy^2 + dz^2 \quad (6.2.2)$$

son equivalentes si permitimos a la coordenada  $t$  asumir valores imaginarios. La métrica de Minkowski se convierte en euclidiana cuando  $t$  se limita al eje imaginario, y viceversa.

Solitones gravitacionales, siendo regulares en todas partes, se pueden obtener de una doble rotación de Wick de un agujero negro [72].

### 6.3. Masa del Solitón y su rol en el crecimiento asintótico del número de estados

En la derivación de Strominger de la expresión de la entropía de Bekenstein-Hawking para entropía del agujero negro BTZ a través de la fórmula de Cardy (sección 5.5), el estado fundamental es identificado como el espacio tiempo  $\text{AdS}_3$ , cuya masa es negativa y está dada por  $M_0 = -\frac{1}{8G}$ . Esto crea una brecha en el espectro de la energía dada por la masa del agujero negro y la masa  $\text{AdS}_3$ , identificada ahora como la energía del estado fundamental. Esto permite obtener una fórmula para el crecimiento asintótico del número de estados, ya que esta brecha garantiza que la función de partición es dominada por el estado fundamental, lo que permite aproximar la densidad de estados a través del método de punto de silla.

En los Artículos [20, 21] los autores extienden esta idea: para un valor fijo de la masa  $M$  sabemos que existen (al menos) dos tipos diferentes de agujeros negros estáticos y circularmente geométricos:

- Agujero negro BTZ (en el vacío) (2.3.41).
- Agujero negro con pelo (con un campo escalar encendido, por ejemplo).

Ambos dependen de solo una constante de integración y no pueden ser deformados suavemente uno en el otro. A modo de ejemplo, consideremos la acción de Einstein-Hilbert con un campo escalar minimamente acoplado, que en tres dimensiones es

$$I[g_{\mu\nu}, \phi] = \frac{1}{\pi G} \int d^3x \sqrt{-g} \left[ \frac{R}{16} - \frac{1}{2} (\nabla\phi)^2 - V(\phi) \right], \quad (6.3.1)$$

donde el potencial viene dado por la expresión

$$V(\phi) = -\frac{1}{8l^2} (\cosh^6 \phi + \nu \sinh^6 \phi), \quad (6.3.2)$$

para el cual el parámetro  $\nu$  se llama parámetro de auto-interacción. Notar que si el campo escalar es nulo, la métrica BTZ es una solución de esta acción en el vacío. Para  $\nu \geq -1$ , existe una solución de agujero negro con pelo, estática y circularmente geométrica dada en (CITA), esta viene dada por

$$ds^2 = - \left( \frac{H}{H+B} \right)^2 F(r) dt^2 + \left( \frac{H+B}{H+2B} \right)^2 \frac{dr^2}{F(r)} + r^2 d\varphi^2, \quad (6.3.3)$$

donde

$$\begin{aligned} H(r) &= \frac{1}{2} \left( r + \sqrt{r^2 + 4Br} \right), \\ F(r) &= \frac{H^2}{l^2} - (1 + \nu) \left( \frac{3B^2}{l^2} + \frac{2B^3}{l^2 H} \right) \end{aligned}$$

y el campo escalar no trivial es

$$\phi(r) = \operatorname{arctanh} \sqrt{\frac{B}{H(r) + B}}. \quad (6.3.4)$$

Aquí  $B$  es una constante de integración positiva y las coordenadas están definidas en  $-\infty < t < \infty$ ,  $r > 0$  y  $0 \leq \varphi < 2\pi$ . Notar que como dijimos anteriormente, tanto la solución como el campo escalar dependen de una constante de integración, y si apagamos el campo escalar ( $B = 0$ ), no recuperamos la métrica BTZ como se esperaría. Por todo esto, el campo escalar no puede ser apagado. Esta última observación sugiere que los agujeros negros, BTZ y con pelo, pertenecen a diferentes sectores desconectados [21].

Luego, para un valor fijo de la masa, la fórmula de Cardy no reproduce la suma de la entropía de un agujero negro en el vacío y uno con pelo, solo reproduce la entropía que corresponde al sector vacío, por lo que el espacio-tiempo AdS<sub>3</sub> debe considerarse como un estado fundamental solo para este sector [20]. Debido a esto, los autores afirman que si queremos reproducir la entropía de un agujero negro con pelo a través de la fórmula de Cardy el sector caracterizado por el pelo debe poseer un estado fundamental distinto desconectado del vacío.

Si miramos lo que ocurre en el sector vacío, el estado fundamental del sector con pelo debe ser suave, regular y no tener constantes de integración, requisito que cumple una solución asociada a un solitón gravitacional. En este sector y considerando como estado fundamental el solitón, el espectro de la energía consiste de una brecha formada principalmente por la energías del agujero negro y del estado fundamental.

Si consideramos ahora su teoría dual, en [73] se expone una fórmula para la densidad de estado de la forma:

$$S = 2\pi \sqrt{\frac{c_{\text{eff}} \Delta_{\text{eff}}}{6}} + 2\pi \sqrt{\frac{\bar{c}_{\text{eff}} \bar{\Delta}_{\text{eff}}}{6}} \quad (6.3.5)$$

donde

$$\begin{aligned} c_{\text{eff}} &= c - 24\Delta_0, & \Delta_{\text{eff}} &= \Delta - \frac{c}{24}, \\ \bar{c}_{\text{eff}} &= c - 24\bar{\Delta}_0, & \bar{\Delta}_{\text{eff}} &= \bar{\Delta} - \frac{\bar{c}}{24}. \end{aligned} \quad (6.3.6)$$

Al igual que en toda tesis,  $\Delta$  y  $\bar{\Delta}$  corresponden a los valores propios de  $L_0$  y  $\bar{L}_0$ , de ellos  $\Delta_0$  y  $\bar{\Delta}_0$  son los de menor valor. Además se asume que el estado fundamental es no degenerado.

Notar que en el caso en que  $\Delta_0 = \bar{\Delta}_0 = 0$ , la expresión (6.3.5) se reduce a la fórmula de Cardy estándar(5.3.9), lo cual corresponde al caso del agujero negro BTZ previamente visto, donde el estado fundamental para este sector vacío corresponde al espacio-tiempo AdS.

Siguiendo con esta idea, en [20] consideran los operadores de Virasoro desplazados

$$L_0^* = L_0 - \frac{c}{24} \quad \text{y} \quad \bar{L}_0^* = \bar{L}_0 - \frac{\bar{c}}{24}, \quad (6.3.7)$$

lo que permite escribir la fórmula (6.3.5) como

$$S = 4\pi\sqrt{-\Delta_0^*\bar{\Delta}_0^*} + 4\pi\sqrt{-\bar{\Delta}_0^*\Delta_0^*}. \quad (6.3.8)$$

donde claramente  $\Delta_0^*$  y  $\bar{\Delta}_0^*$  representan los menores valores de los autovalores  $\Delta^*$  y  $\bar{\Delta}^*$  de los operadores  $L_0^*$  y  $\bar{L}_0^*$ . Debemos notar que la expresión (6.3.8) está definida solo para valores de  $\Delta_0^*$  y  $\bar{\Delta}_0^*$  negativos, esto último junto a unitariedad nos lleva a

$$-\frac{c}{24} \leq \Delta_0^* \leq 0, \quad -\frac{\bar{c}}{24} \leq \bar{\Delta}_0^* \leq 0. \quad (6.3.9)$$

Destacamos entonces que ahora, el crecimiento asintótico del número de estados puede también ser obtenido si solo conocemos el espectro de los operadores de Virasoro sin hacer ninguna referencia explícita a las cargas centrales [20].

Queremos una expresión para entropía de agujeros negros con pelo, esto puede ser obtenido si asumimos que tanto  $\Delta_0^*$  como  $\bar{\Delta}_0^*$  están determinados por las cargas globales de su correspondiente solitón [21], así que de acuerdo con las ecuaciones 6.3.10 tenemos

$$\Delta_0^* = \frac{Ml + J}{2}, \quad \bar{\Delta}_0^* = \frac{Ml - J}{2}. \quad (6.3.10)$$

Entonces, para el sector hairy, donde el estado fundamental es descrito por un solitón gravitacional, para el cual

$$\Delta_0^* = \bar{\Delta}_0^* = \frac{l}{2}M_{sol}. \quad (6.3.11)$$

donde  $M_{sol}$  representa la masa del solitón. Visto todo esto, para agujeros negros con pelo estáticos, considerando  $\Delta = \bar{\Delta} = \frac{l}{2}M$ , donde  $M$  es asociada a la masa del agujero negro

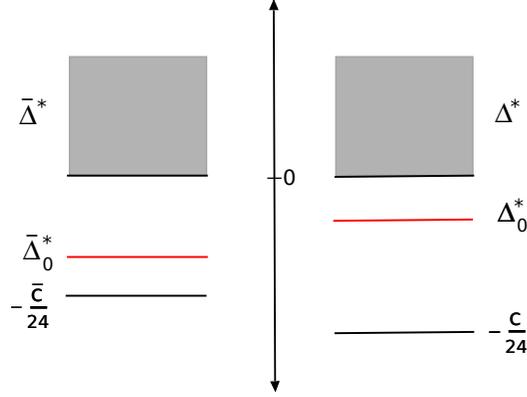


Figura 6.1: El crecimiento asintótico del número de estados puede ser escrito exclusivamente en términos del espectro de los operadores de Virasoro desplazados.

con pelo, podemos ver que la ecuación (6.3.8) se reduce a

$$S = 4\pi l \sqrt{-M_{\text{sol}} M},$$

la que nos entrega la entropía obtenida a través del crecimiento asintótico de estados para el sector con pelo.

Por lo tanto, para valores fijos de las cargas globales, se confirma que la entropía total proviene de la contribución de cada sector [20, 21].

## 6.4. Teoría de campos con escalamiento anisotrópico en 1+1 dimensiones y Fórmula de Cardy

En espacio-tiempo de dos dimensiones, teorías de campo con escalamiento anisotrópico se han considerado a lo largo de diferentes contextos [74–77]. Uno de los resultados más importantes en este ámbito es que la entropía semiclásica de agujeros negros asintóticamente Lifshitz puede ser obtenida desde el crecimiento asintótico del número de estados de una teoría de campos con escalamiento Lifshitz en dos dimensiones, donde el estado fundamental corresponde a un solitón. Esto se muestra en [23], donde en este contexto, es decir teorías de campo con escalamiento Lifshitz en 1+1 dimensiones, los autores demuestran que una dualidad entre alta y baja temperatura surge naturalmente como consecuencia de que las álgebras Lifshitz con exponentes dinámicos  $z$  y  $z^{-1}$  son isomorfos. A partir de esto encuentran una fórmula precisa para el crecimiento asintótico del número de estados con una energía fija que depende  $z$ , y la energía del estado fundamental, lo cual se reduce

a la fórmula Cardy para  $z = 1$ . Lo siguiente es una revisión de este trabajo:

Consideremos una teoría de campos en dos dimensiones con escalamiento anisotrópico de la forma (6.1.1), esto es

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad x \rightarrow \lambda x. \quad (6.4.1)$$

Esta simetría, junto a las traslaciones y cambios en el tiempo dados por

$$x \rightarrow x + x_0, \quad t \rightarrow t + t_0, \quad (6.4.2)$$

son abarcados por el álgebra

$$\begin{aligned} [P, H] &= 0, \\ [D, P] &= P, \\ [D, H] &= zH, \end{aligned} \quad (6.4.3)$$

donde  $D$  es el generador de (6.4.1), y  $P, H$  son el generador de momentum y el hamiltoniano, respectivamente. Esto se conoce como un álgebra de Lifshitz bidimensional con exponente dinámico  $z$  [78, 79].

Es importante destacar que realizando el cambio de base

$$\bar{P} = H, \quad \bar{H} = P, \quad \bar{D} = z^{-1}D, \quad (6.4.4)$$

el álgebra (6.4.3) es llevada a

$$\begin{aligned} [\bar{P}, \bar{H}] &= 0, \\ [\bar{D}, \bar{P}] &= \bar{P}, \\ [\bar{D}, \bar{H}] &= z^{-1}\bar{H}. \end{aligned} \quad (6.4.5)$$

lo que nos permite verificar que álgebras de Lifshitz de la forma (6.4.3) y (6.4.5), con exponentes dinámicos  $z$  y  $z^{-1}$  respectivamente, son isomorfas.

Este isomorfismo local induce la equivalencia entre la función de partición a baja y a alta temperatura para la misma teoría sobre un cilindro de radio  $l$ . Esto podemos verlo de la siguiente forma: a temperatura finita  $T = \beta^{-1}$  la función de partición puede ser definida sobre un toro donde el tiempo euclideo ( $\tau = i\tau$ ) es periódico, tal que

$$0 \leq \tau \leq \beta \quad \text{y} \quad 0 \leq \phi \leq 2\pi l.$$

Entonces, el cambio de base (6.4.4) intercambia los roles del tiempo euclideo y el ángulo, de modo que los periodos nos quedan

$$0 \leq \bar{\phi} \leq \beta \quad \text{y} \quad 0 \leq \bar{\tau} \leq 2\pi l.$$

El período del ángulo es entonces recuperado en virtud del escalamiento generado por  $\bar{D}$  en (6.4.5), dado por

$$\bar{\tau} \rightarrow \lambda^{\frac{1}{z}} \bar{\tau}, \quad \bar{\phi} \rightarrow \lambda \bar{\phi}, \quad (6.4.6)$$

con  $\lambda = 2\pi l \beta^{-1}$ . Entonces el período de  $\bar{\tau}$  de acuerdo a

$$\bar{\beta} = (2\pi l)^{1+\frac{1}{z}} \beta^{-\frac{1}{z}}, \quad (6.4.7)$$

lo que permite establecer la relación entre la función de partición a baja y alta temperatura como  $Z[\bar{\beta}] = Z[\beta]$ . Considerando todo lo anterior, podemos suponer que la función de partición es invariante bajo

$$Z[\beta] = Z\left[(2\pi l)^{1+\frac{1}{z}} \beta^{-\frac{1}{z}}\right]. \quad (6.4.8)$$

Asumiendo la existencia de una brecha en el espectro, la dualidad de baja y alta temperatura de la función de partición (6.4.8) nos permite obtener una fórmula precisa para el crecimiento asintótico del número de estados con una energía fija que depende de  $z$  y la energía del estado fundamental, la cual supondremos negativa y dada por  $-\Delta_0$ .

La brecha garantiza que a baja temperatura la función de partición es dominada por la contribución del estado fundamental, es decir, la función de partición puede ser aproximada como  $Z[\beta] \approx e^{\beta \Delta_0}$ . Entonces si consideramos (6.4.8) tenemos que a alta temperatura la función de partición viene dada por

$$Z[\beta] \approx e^{(2\pi l)^{1+\frac{1}{z}} \beta^{-\frac{1}{z}} \Delta_0}, \quad (6.4.9)$$

y, por tanto, el crecimiento asintótico del número de estados con energía fija  $\Delta \gg \Delta_0$  podemos obtenerlo de

$$\begin{aligned} \rho(\Delta) &= \frac{1}{2\pi i} \int d\beta Z[\beta] e^{\beta \Delta}, \\ &\approx \frac{1}{2\pi i} \int d\beta e^{f(\beta, \Delta)}, \end{aligned} \quad (6.4.10)$$

donde  $f(\beta, \Delta) := (2\pi l)^{1+\frac{1}{z}} \beta^{-\frac{1}{z}} \Delta_0 + \beta \Delta$ . Esta expresión puede ser evaluada por aproximación en el punto de silla el cual es caracterizado por el extremo de  $f(\beta, \Delta)$ . Este punto se corresponde a  $\beta_* = 2\pi l \left(\frac{\Delta_0}{z\Delta}\right)^{\frac{z}{z+1}}$ , y es tal que  $\partial_{\beta} f|_{\beta_*} = 0$ . Notar que hemos supuesto implícitamente que el estado fundamental es no degenerado, entonces la entropía dada por  $S = \log \rho(\Delta) \approx f(\beta_*, \Delta)$ , la obtenemos como

$$S = 2\pi l(z+1) \left[ \left(\frac{\Delta_0}{z}\right)^z \Delta \right]^{\frac{1}{z+1}}. \quad (6.4.11)$$

La termodinámica de agujeros negros asintóticamente Lifshitz encaja con los resultados anteriores, donde el estado fundamental es identificado como un solitón [23].



## Capítulo 7

# Extensión de la Fórmula de Cardy al caso de violación a la propiedad de hiperescalamiento

Teniendo en cuenta la fórmula (6.4.11), nuestro propósito es proponer una fórmula de Cardy generalizada en el caso de agujeros negros tridimensionales en espacio-tiempos de violación al hiperescalamiento bajo la suposición de que el estado fundamental se identifica como un solitón. El elemento de línea para la métrica de violación al hiperescalamiento está conformemente relacionado a la métrica de Lifshitz como (6.1.5), y en tres dimensiones viene dado por

$$ds^2 = \frac{1}{r^{2\theta}} \left[ -r^{2z} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 d\varphi^2 \right]. \quad (7.0.1)$$

Lo primero es notar que, como vimos en la sección 6.1, para espacio-tiempos provistos de esta métrica, el escalamiento de la entropía en términos de la temperatura esta definido como

$$\mathcal{S} \sim T^{\frac{d_{\text{eff}}}{z}}, \quad (7.0.2)$$

donde  $z$  es el exponente dinámico responsable de la anisotropía del sistema (6.1.1) y  $d_{\text{eff}}$  denota la dimensionalidad espacial efectiva la cual depende del exponente de violación al hiperescalamiento  $\theta$  visto en (7.0.1). Este escalamiento (7.0.2) depende explícitamente de la teoría gravitatoria: en el caso de la gravedad estándar de Einstein en tres dimensiones con una fuente, tenemos  $d_{\text{eff}} = 1 - \theta$  [68], mientras que para las teorías de la gravedad cuadrática en tres dimensiones tendremos  $d_{\text{eff}} = 1 + \theta$ , y para teorías de gravedad cúbica  $d_{\text{eff}} = 1 + 3\theta$ .

Como vimos en la sección 6.4, en el caso de Lifshitz se ha encontrado una fórmula de Cardy anisotrópica para la entropía de agujeros de negros, explotando un isomorfismo entre las álgebras de Lie de Lifshitz con el exponente dinámico  $z$  y  $z^{-1}$  en dos dimensiones [23]. En esta última referencia, la fórmula de Cardy se ha derivado asumiendo que el estado fundamental se identifica con un solitón que está, además, separado del espectro del agujero negro por una brecha. Siguiendo con esta idea, en espacio-tiempos con violación al hiperescalamiento primero exploramos teorías gravitatorias de curvatura cuadrática, que en tres dimensiones la más general está dada por la acción

$$S[g_{\mu\nu}] = \int d^3x \sqrt{-g} (\beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}). \quad (7.0.3)$$

Para esta teoría, hemos encontrado cuatro clases de agujeros negros de violación al hiperescalamiento, para las cuales calculamos sus masas así como también las de sus respectivas homologas solitónicas. También mostramos que siempre existe una elección de la constante de acoplamiento (en nuestro caso  $\beta_2$ ) que asegura que las masas de agujero negro sean positivas mientras que las de sus solitones resultan negativas. Esto asegura la existencia de una brecha en el espectro de las soluciones.

Con el fin de mostrar que la expresión de la entropía semiclásica obtenida asumiendo que el estado fundamental se identifica con el solitón coincide con la entropía de Wald, hacemos la suposición de que la teoría de campos dual es invariante bajo la siguiente transformación modular

$$\mathcal{Z}[\beta] = \mathcal{Z} \left[ (2\pi)^{1+\frac{1+\theta}{z}} \beta^{-\frac{1+\theta}{z}} \right], \quad (7.0.4)$$

donde  $\beta$  es el inverso de la temperatura. Esto permite establecer una relación entre las funciones de partición en los regímenes de baja y alta temperatura, siempre que  $(1+\theta)/z > 0$ . Notar que en el caso Lifshitz, es decir  $\theta = 0$ , esta transformación modular se reduce a la derivada en [23]. Para cada solución con el signo apropiado de la constante de acoplamiento  $\beta_2$  para la cual la masa del agujero negro  $\mathcal{M}_{\text{bh}} > 0$  y la masa del solitón  $\mathcal{M}_{\text{sol}} < 0$ , la existencia de una brecha asegura que la función de partición a baja temperatura esté dominada por la contribución del estado fundamental (solitón),

$$\mathcal{Z}[\beta] \sim \exp(-\beta \mathcal{M}_{\text{sol}}), \quad (7.0.5)$$

y junto con la identidad (7.0.4), tenemos que a alta temperatura

$$\mathcal{Z}[\beta] \sim \exp \left( -(2\pi)^{1+\frac{1+\theta}{z}} \beta^{-\frac{1+\theta}{z}} \mathcal{M}_{\text{sol}} \right). \quad (7.0.6)$$

Entonces, el crecimiento asintótico del número de estados a energía fija  $\mathcal{M}_{\text{bh}}$  puede ser obtenida por aproximación a través del método de punto de silla, por lo que obtenemos

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi}{1+\theta} \mathcal{M}_{\text{bh}} (1+\theta+z) \left[ -\frac{\mathcal{M}_{\text{sol}}(1+\theta)}{z\mathcal{M}_{\text{bh}}} \right]^{\frac{z}{z+1+\theta}}. \quad (7.0.7)$$

---

En contraste con el caso Lifshitz tridimensional en el que la dimensionalidad espacial efectiva siempre toma el valor  $d_{\text{eff}} = 1$ , nuestra propuesta para la fórmula de Cardy en el caso de la métrica de violación al hiperescalamiento dependerá explícitamente del exponente  $\theta$ , donde si hacemos  $\theta = 0$  esta fórmula se reduce a la encontrada en el caso Lifshitz (6.4.11).

Algo importante a remarcar, es que en el caso de violación al hiperescalamiento para el caso de gravedad estándar de Einstein con una fuente, la fórmula de Cardy obtenida en [68] difiere de (7.0.7) por el cambio  $(1+\theta) \mapsto (1-\theta)$  el cual precisamente corresponde al cambio de dimensionalidad espacial efectiva  $d_{\text{eff}}$ . Entonces considerando nuestros resultados para los casos de teoría cuadrática y cúbica, y la obtenia en [68], podemos especular la forma general de la fórmula de Cardy en el caso de métricas de violación al hiperescalamiento, para un valor arbitrario de la dimensionalidad efectiva espacial

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi}{d_{\text{eff}}} \mathcal{M}_{\text{bh}}(d_{\text{eff}} + z) \left[ -\frac{\mathcal{M}_{\text{sol}} d_{\text{eff}}}{z \mathcal{M}_{\text{bh}}} \right]^{\frac{z}{d_{\text{eff}} + z}}. \quad (7.0.8)$$

Como anteriormente, esta fórmula puede ser derivada asumiendo que la función de partición es invariante bajo la transformación modular

$$\mathcal{Z}[\beta] = \mathcal{Z} \left[ (2\pi)^{1 + \frac{d_{\text{eff}}}{z}} \beta^{-\frac{d_{\text{eff}}}{z}} \right]. \quad (7.0.9)$$

En otras palabras, esto significa que para un agujero negro de violación al hiperescalamiento cuya entropía tiene un escalamiento (7.0.2), la forma de la fórmula de Cardy generalizada esta dada por (7.0.8).

Como última observación una fórmula de Smarr puede también ser obtenida desde el caso genérico para la expresión de la entropía (7.0.8) junto con la primera ley de la termodinámica, esta es

$$\mathcal{M}_{\text{bh}} = \frac{d_{\text{eff}}}{z + d_{\text{eff}}} T \mathcal{S}. \quad (7.0.10)$$

Todos estos resultados, se encuentran en el artículo [1].

# Towards the Cardy formula for hyperscaling violation black holes

Moisés Bravo-Gaete,<sup>\*</sup> Sebastián Gómez,<sup>†</sup> and Mokhtar Hassaine<sup>‡</sup>

*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747, Talca, Chile*

(Received 6 May 2015; published 11 June 2015)

The aim of this paper is to propose a generalized Cardy formula for three-dimensional hyperscaling violation black holes. We first note that for the hyperscaling violation metrics, the scaling of the entropy in terms of the temperature (defined as the effective spatial dimensionality divided by the dynamical exponent) depends explicitly on the gravity theory. Starting from this observation, we first explore the case of quadratic curvature gravity theories for which we derive four classes of asymptotically hyperscaling violation black holes. For each solution, we compute the mass as well as the mass of the soliton counterpart obtained through a double Wick rotation. Assuming that the partition function has a certain invariance involving the effective spatial dimensionality, a generalized Cardy formula is derived. This latter is shown to correctly reproduce the entropy where the ground state is identified with the soliton. Comparing our formula with the one derived in the standard Einstein gravity case with source, we stress the role played by the effective spatial dimensionality. From this observation, we speculate the general form of the Cardy formula for hyperscaling violation metric with an arbitrary value of the effective spatial dimensionality. Finally, we test the viability of this formula in the case of a cubic gravity theory.

DOI: [10.1103/PhysRevD.91.124038](https://doi.org/10.1103/PhysRevD.91.124038)

PACS numbers: 04.70.Bw, 04.50.Kd, 04.70.Dy

## I. INTRODUCTION

In the past decade, there has been a real interest in extending the ideas underlying the Anti-de Sitter (AdS)/CFT correspondence [1] in order to gain a better understanding of strongly condensed matter systems. In condensed matter physics, a quantum phase transition is a transition that occurs between two different phases at zero temperature. At this critical point, the system may enjoy an anisotropic scaling symmetry or even display a hyperscaling violation which is reflected by the fact that the entropy  $S$  scales with respect to the temperature  $T$  as [2–4]

$$S \sim T^{\frac{d_{\text{eff}}}{z}}, \quad (1)$$

where  $d_{\text{eff}}$  is the effective spatial dimensionality, and where  $z$  is the dynamical exponent responsible of the anisotropy of the system

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}. \quad (2)$$

In the nonrelativistic version of the AdS/CFT correspondence, the gravity dual metric in the anisotropic case is played by the Lifshitz metric whose line element in  $D$  dimensions is given by [5]

$$ds_L^2 = -\frac{r^{2z}}{l^2z} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\vec{x}^2, \quad (3)$$

where  $\vec{x} = (x^1, \dots, x^{D-2})$ . For the Lifshitz metric, it is easy to see that the anisotropic transformations (2) together with

$r \rightarrow \lambda^{-1} r$  act as an isometry. It is also well known that, in contrast to the AdS isotropic case  $z = 1$ , the Lifshitz metrics or their black hole extensions are not solutions of the standard Einstein gravity equations but instead require the introduction of some extra matter source and/or to consider higher-order gravity theories, see e.g. [6–13]. Moreover, in the Lifshitz case, the effective spatial dimensionality has a fixed value which only depends on the dimension as  $d_{\text{eff}} = D - 2$ .

On the other hand, systems which display a hyperscaling are described by the so-called hyperscaling violation metric whose line elements are conformally related to the Lifshitz metric as

$$ds^2 = \frac{1}{r^{\frac{2\theta}{D-2}}} \left[ -r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 d\vec{x}^2 \right], \quad (4)$$

where now the transformations (2) together with  $r \rightarrow \lambda^{-1} r$  act rather like a conformal transformation,  $ds^2 \rightarrow \lambda^{2\theta/(D-2)} ds^2$ . Examples of hyperscaling violation black holes are known in the literature, see e.g. [14–19]. As shown below, in the hyperscaling violation case, the effective spatial dimensionality will explicitly involve the hyperscaling violation exponent  $\theta$ , and this dependence will vary in function of the gravity theory considered. For example, in the case of standard three-dimensional Einstein gravity with source, we have  $d_{\text{eff}} = 1 - \theta$ , see e.g. [18] while (see below) for quadratic (respectively cubic) gravity theories in three dimensions we will have  $d_{\text{eff}} = 1 + \theta$  (respectively  $d_{\text{eff}} = 1 + 3\theta$ ).

The aim of this paper is to speculate the form of a generalized Cardy formula in three dimensions for the hyperscaling violation metric under the assumption that the ground state is identified with the soliton. This task has

<sup>\*</sup>mbravog-at-inst-mat.otalca.cl

<sup>†</sup>sebago-at-inst-mat.otalca.cl

<sup>‡</sup>hassaine-at-inst-mat.otalca.cl

been realized in the Lifshitz case by exploiting an isomorphism between the Lifshitz Lie algebras with dynamical exponent  $z$  and  $z^{-1}$  in two dimensions, see [20]. In this last reference, the Cardy formula has been derived assuming that the ground state is identified with the soliton which is, in addition, separated from the black hole spectrum by a gap. Note that in Ref. [10], we have tested the viability of the Cardy formula given in [20] in some concrete examples of Lifshitz black holes with a source given by a scalar field nonminimally coupled. Just for completeness, we would like to mention that in the standard three-dimensional AdS gravity supported by scalar fields, the identification of the solitons as ground states turns out to be essential for microscopically counting for the black holes entropy using Cardy formula [21].

From now, one can anticipate that, in contrast with the three-dimensional Lifshitz case where the effective spatial dimensionality always takes the value  $d_{\text{eff}} = 1$ , our proposal for the Cardy formula for the hyperscaling violation metric will instead depend explicitly on the exponent  $\theta$ , and this dependence is inheriting from the theory considered. In order to guess the form of the possible Cardy formula for hyperscaling violation, we will consider the case of quadratic and cubic curvature gravity theories for which we will derive black hole solutions and their soliton counterparts. The masses of the black holes and solitons will be computed using the quasilocal formalism introduced in [22,23] where in the next section we will briefly recall the main lines. Comparing our results obtained in the quadratic and cubic cases to those derived recently in [18] in the case of standard Einstein gravity with source, we will speculate the form of the generalized Cardy formula with a ground state identified with the soliton. This generalized formula which reduces to the one derived in [18] in the standard Einstein case will be shown to depend explicitly on the effective spatial dimensionality, and we will show that this formula correctly reproduces the semiclassical entropy in the different examples exploited in this paper.

The plan of the paper is organized as follows. In the next section, we consider the most general quadratic curvature gravity theory in three dimensions for which we derive four classes of hyperscaling violation black holes. For each solution, we compute their masses as well as well those of their respective soliton counterparts. We also show that there always exists an election of the coupling constant that ensures the black hole masses to be positive while those of their soliton counterparts turn to be negative; this ensures the existence of a gap in the spectrum of the solutions. In addition, assuming that the theory is invariant under a certain modular transformation whose form depends on the effective spatial dimensionality, we will be able to obtain a Cardy formula. This latter under the assumption that the ground state is identified with the soliton, correctly reproduces the expressions of the Wald entropy for each of our examples. Then, comparing our formula with the one

derived recently in the standard Einstein case with source [18], we propose a generalized Cardy formula whose expression depends explicitly on the effective spatial dimensionality. In the last section, we check the validity of this Cardy formula in the case of the most general cubic gravity theory in three dimensions. Finally, the last section is devoted to our conclusions.

## II. QUADRATIC CURVATURE GRAVITY THEORY

In three dimensions, we consider the most general quadratic curvature gravity theory given by the following action:

$$\begin{aligned} S[g_{\mu\nu}] &= \int d^3x \sqrt{-g} (\beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\mu\nu} R^{\mu\nu}) \\ &= \int d^3x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (5)$$

where  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are two coupling constants. The field equations arising from the variation of the action (5) read

$$\begin{aligned} \beta_2 \square R_{\mu\nu} + \frac{1}{2} (4\beta_1 + \beta_2) g_{\mu\nu} \square R - (2\beta_1 + \beta_2) \nabla_\mu \nabla_\nu R \\ + 2\beta_2 R_{\mu\alpha\nu\beta} R^{\alpha\beta} + 2\beta_1 R R_{\mu\nu} \\ - \frac{1}{2} (\beta_1 R^2 + \beta_2 R_{\alpha\beta} R^{\alpha\beta}) g_{\mu\nu} = 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Since we are looking for asymptotically hyperscaling violation black holes, we posit the following ansatz for the metric:

$$ds^2 = \frac{1}{r^{2\theta}} \left[ -r^{2z} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 d\varphi^2 \right], \quad (7)$$

where the metric function  $f(r)$  possesses at least one root, and satisfies  $\lim_{r \rightarrow \infty} f(r) = 1$  in order to reproduce asymptotically the hyperscaling violation metric (4). To simplify the computations, we will consider the following particular form for the metric function:

$$f(r) = 1 - \left( \frac{r_h}{r} \right)^\alpha, \quad (8)$$

where  $\alpha$  is a constant with  $\alpha > 0$ , and where  $r_h$  denotes the location of the horizon. In fact, there exist more general solutions within the ansatz (7) which involve more integration constants. We will discuss one of these solutions at the end of the section devoted to the discussion.

In addition, since we will be interested in the thermodynamic properties of the solutions, we compute the Wald entropy for the generic solution (7) and (8) which is given by

$$\begin{aligned} S_W &= 8\pi^2 \alpha (r_h)^{1+\theta} [(8\theta - 6z + 2\alpha - 4)\beta_1 \\ &\quad + (3\theta - 3z - 1 + \alpha)\beta_2], \end{aligned} \quad (9)$$

while the Hawking temperature takes the form

$$T = \frac{\alpha(r_h)^z}{4\pi}. \quad (10)$$

It is important to stress from now that the entropy scales with the temperature as

$$S_W \sim T^{\frac{1+\theta}{z}}, \quad (11)$$

which means that the effective spatial dimensionality  $d_{\text{eff}}$  as defined in (1) is given by

$$d_{\text{eff}} = 1 + \theta. \quad (12)$$

This dependence is due to the fact of considering quadratic curvature gravity theories. Indeed, in the case of standard Einstein-Hilbert gravity supplemented by a source given by the (Maxwell)-dilaton Lagrangian [14,15,18], the effective spatial dimensionality is instead  $d_{\text{eff}} = 1 - \theta$ . From now, one can already conclude to the nonuniversal character of the scaling of the entropy in terms of the temperature in the case of hyperscaling violation metric. In other words, this means that the effective spatial dimensionality will depend on the theory considered. This is in contrast with the Lifshitz case  $\theta = 0$  where, independently of the theory, the entropy always scales as  $S_W \sim T^{\frac{1}{z}}$ , see [20] in the general context and [7,10–12] for concrete examples. This remark will have its importance when speculating the form of the generalized Cardy for the hyperscaling violation metric.

In order to compute the masses of our black hole and soliton solutions, we opt for the quasilocal formalism presented in [22,23] whose main result lies in the relation established between the off-shell Abbott-Deser-Tekin potential  $Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu}$  and the off-shell Noether potential  $K^{\mu\nu}$  in the form

$$\sqrt{-g}Q_{\text{ADT}}^{\mu\nu} = \frac{1}{2}\delta K^{\mu\nu} - \xi^{[\mu}\Theta^{\nu]}, \quad (13)$$

where  $\xi^\mu \partial_\mu$  denotes the Killing vector field which in our case is  $\partial_t$ , and  $\Theta^\mu$  represents a surface term arising from the variation of the action. More precisely, the expressions appearing in (13) are given by

$$\Theta^\mu = 2\sqrt{-g}[P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}\nabla_\gamma\delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta}\nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma}], \quad (14)$$

$$K^{\mu\nu} = \sqrt{-g}[2P^{\mu\nu\rho\sigma}\nabla_\rho\xi_\sigma - 4\xi_\sigma\nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma}], \quad (15)$$

with  $P^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial\mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}$ , where  $\mathcal{L}$  is the Lagrangian defined in (5). Since the ansatz metric (7) and (8) depends continuously on the integration constant  $r_h^\alpha$ , one can define the conserved charge associated to the Killing field  $\partial_t$  (which corresponds to the mass) in the interior region and not in the asymptotic region by introducing a parameter  $s$  with range  $s \in [0, 1]$  as  $sr_h^\alpha$ . The advantage of this redefinition lies in the fact that it allows one to interpolate between the free parameter solution  $s = 0$  and the solution with  $s = 1$ . In doing so, the quasilocal charge is defined as [22,23]

$$\mathcal{M}_{\text{bh}}(\xi) = \int_{\mathcal{B}} dx_{\mu\nu} \left( \Delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Theta^{\nu]}(\xi|s) \right), \quad (16)$$

where  $\Delta K^{\mu\nu}(\xi) \equiv K_{s=1}^{\mu\nu}(\xi) - K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$  denotes the variation of the Noether potential from the vacuum solution, and  $dx_{\mu\nu}$  represents the integration over the compact codimension two-subspace. For the generic solution (7) and (8), after a tedious but straightforward computation, this last expression becomes parametrized as

$$\mathcal{M}_{\text{bh}} = 2\pi[(r_h)^\alpha \Psi_1 r^{1+\theta+z-\alpha} + (r_h)^{2\alpha} \Psi_2 r^{1+\theta+z-2\alpha}], \quad (17)$$

where  $\Psi_1$  and  $\Psi_2$  are constants given by

$$\begin{aligned} \Psi_1 &= [4\alpha^3 + (-8 + 4\theta - 8z)\alpha^2 + (-40\theta^2 + 8\theta \\ &\quad + 8 - 4z^2 + 36z\theta)\alpha + 4(2z - 1 - 7\theta)(z^2 - 2z\theta \\ &\quad + z + 1 + \theta^2 - 2\theta)]\beta_1 + [2\alpha^3 + (-4z - 3 + \theta)\alpha^2 \\ &\quad + (-15\theta^2 + 15z\theta + 3z + 2\theta - 2z^2 + 1)\alpha - 2z^2 \\ &\quad - 18z^2\theta - 6\theta - 2 - 12z\theta + 4z^3 + 24z\theta^2 - 10\theta^3 \\ &\quad + 18\theta^2 + 4z]\beta_2, \\ \Psi_2 &= [-2\alpha^3 + (4z + 5 - \theta)\alpha^2 + (24\theta^2 - 2\theta - 21z\theta \\ &\quad - 6 + 2z^2 - 3z)\alpha - 2(2z - 1 - 7\theta)(z^2 - 2z\theta + z \\ &\quad + 1 + \theta^2 - 2\theta)]\beta_1 + [-\alpha^3 + (2 + 2z)\alpha^2 + (-9z\theta \\ &\quad + z^2 - 3z - 1 + 9\theta^2)\alpha + 9z^2\theta + 1 + 3\theta + 6z\theta + z^2 \\ &\quad - 2z - 12z\theta^2 - 2z^3 - 9\theta^2 + 5\theta^3]\beta_2. \end{aligned}$$

Since this expression of the mass must be independent of the radial coordinate  $r$ , the black hole solutions with nonvanishing masses, as shown below, will automatically satisfy  $\alpha = 1 + \theta + z$  with  $\Psi_2 = 0$  or  $\alpha = (1 + \theta + z)/2$  with  $\Psi_1 = 0$ .

Since our aim is to derive a generalized version of the Cardy formula for the hyperscaling violation metric where the ground state is played by the soliton, we note that for a black hole solution of the form (7) and (8), its soliton counterpart obtained through a double Wick rotation will have the following generic form:

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{1}{r^{2\theta}} \left[ -r^2 dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 \tilde{f}(r)} + r^{2z} \tilde{f}(r) d\varphi^2 \right], \\ \tilde{f}(r) &= 1 - \left( \frac{\tilde{r}_h}{r} \right)^\alpha, \end{aligned} \quad (18)$$

where we have defined

$$\tilde{r}_h = \left( \frac{2}{\alpha} \right)^{\frac{1}{z}}.$$

Along the same lines as before, the quasilocal mass for the soliton (18) can schematically be written as

$$\mathcal{M}_{\text{sol}} = 2\pi[(\tilde{r}_h)^\alpha \Phi_1 r^{1+\theta+z-\alpha} + (\tilde{r}_h)^{2\alpha} \Phi_2 r^{1+\theta+z-2\alpha}], \quad (19)$$

where  $\Phi_1$  and  $\Phi_2$  read

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & [4\alpha^3 + (-12z - 4 + 4\theta)\alpha^2 + (4 + 12z^2 + 12\theta z + 16\theta - 36\theta^2)\alpha - 4(2z - 3 + 7\theta)(z^2 - 2\theta z + z + 1 - 2\theta + \theta^2)]\beta_1 \\ & + [\alpha^3 + (2\theta - 3z - 2)\alpha^2 + (6\theta + 3\theta z + 4z^2 - 13\theta^2 + 3 - z)\alpha + 6 - 4z^3 - 12\theta z - 22\theta + 6z^2 - 10\theta^3 - 4z \\ & - 2z^2\theta + 16\theta^2 z + 26\theta^2]\beta_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Phi_2 = & [-4\alpha^3 + (14z + 5 - 9\theta)\alpha^2 + (-14z^2 - 10\theta - 2 + 20\theta^2 + 3\theta z - 3z)\alpha \\ & + 2(2z - 3 + 7\theta)(z^2 - 2\theta z + z + 1 - 2\theta + \theta^2)]\beta_1 + [-\alpha^3 + (-4\theta + 4z + 2)\alpha^2 \\ & + (-3 - 5z^2 + z + 3\theta z + 7\theta^2 - 4\theta)\alpha - 3 + 2z^3 + 6\theta z + 11\theta - 3z^2 + 5\theta^3 + 2z + z^2\theta - 8\theta^2 z - 13\theta^2]\beta_2. \end{aligned}$$

### A. Four classes of black hole solutions and their soliton counterparts

In what follows, we present four classes of black hole solutions of the field equations (6) within the ansatz given by (7) and (8). For each solution, we compute the mass (16) as well as the mass of their soliton counterpart (18) through the generic expression given by (19). We check that the first law of black hole thermodynamics,

$$d\mathcal{M}_{\text{bh}} = TdS_W, \quad (20)$$

is valid for all these four cases.

The first family of solutions is obtained for an hyperscaling violation exponent and dynamical exponent that take the values  $\theta = 2$  and  $z = 1$ , and the line element is given by

$$\begin{aligned} ds^2 = & \frac{1}{r^4} \left[ -r^2 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 d\varphi^2 \right], \\ f(r) = & 1 - \left( \frac{r_h}{r} \right)^4, \end{aligned} \quad (21)$$

provided that the coupling constants  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are tied as

$$\beta_1 = -\frac{5}{13}\beta_2. \quad (22)$$

In this case, the Wald entropy  $S_W$  (9), the Hawking temperature  $T$  (10) and the black hole mass  $\mathcal{M}_{\text{bh}}$  (17) are given by

$$\begin{aligned} S_W = & \frac{256}{13}\pi^2\beta_2(r_h)^3, & T = & \frac{r_h}{\pi}, \\ \mathcal{M}_{\text{bh}} = & \frac{192}{13}\pi\beta_2(r_h)^4, \end{aligned} \quad (23)$$

and it is a matter of check to see that the first law (20) is satisfied. The corresponding soliton whose line element (18) written in terms of the ‘‘regular’’ coordinates

$$r = \frac{1}{2\sqrt{\sin\left(\frac{\rho}{2}\right)}},$$

reads

$$ds^2 = -4\sin\left(\frac{\rho}{2}\right)dt^2 + d\rho^2 + 4\sin\left(\frac{\rho}{2}\right)\cos^2\left(\frac{\rho}{2}\right)d\varphi^2, \quad (24)$$

has a mass (19) given by

$$\mathcal{M}_{\text{sol}} = -\frac{4}{13}\beta_2\pi. \quad (25)$$

The second and third solutions are identified as black string solutions since the hyperscaling dynamical exponent  $\theta = 1$ . The first family of black string solution exists for  $z = 4$ , and its line element is

$$\begin{aligned} ds^2 = & -r^6 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^4 f(r)} + d\varphi^2, \\ f(r) = & 1 - \left( \frac{r_h}{r} \right)^6, \end{aligned} \quad (26)$$

provided that the coupling constants  $\beta_1$  and  $\beta_2$  are tied as

$$\beta_1 = -\frac{1}{3}\beta_2. \quad (27)$$

For this solution, the thermodynamics quantities are given by

$$\begin{aligned} S_W = & -64\pi^2\beta_2(r_h)^2, & T = & \frac{3(r_h)^4}{2\pi}, \\ \mathcal{M}_{\text{bh}} = & -32\pi\beta_2(r_h)^6, \end{aligned} \quad (28)$$

and, as before, it is easy to see that the first law (20) holds. On the other hand, using the expression (19), its soliton counterpart is shown to have a mass

$$\mathcal{M}_{\text{sol}} = \frac{64}{9} \sqrt{3} \pi \beta_2. \quad (29)$$

The other black string solution  $\theta = 1$  arises for  $z = 1$  and is given by

$$\begin{aligned} ds^2 &= -f(r)dt^2 + \frac{dr^2}{r^4 f(r)} + d\varphi^2, \\ f(r) &= 1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^3, \end{aligned} \quad (30)$$

with  $\beta_1$  given by (27). For this black string solution, the thermodynamic quantities read

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_W &= 16\pi^2 \beta_2 (r_h)^2, & T &= \frac{3r_h}{4\pi}, \\ \mathcal{M}_{\text{bh}} &= 8\pi \beta_2 (r_h)^3, & \mathcal{M}_{\text{sol}} &= -\frac{32}{27} \beta_2 \pi, \end{aligned} \quad (31)$$

and these latter fit perfectly with the first law (20).

The last family of solution corresponds to a Lifshitz black hole (that is  $\theta = 0$ ) with a dynamical exponent  $z = 3$ ,

$$\begin{aligned} ds^2 &= -r^6 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 d\varphi^2, \\ f(r) &= 1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^4, \end{aligned} \quad (32)$$

provided that the coupling constant  $\beta_1$  is given by (22). As before, the Wald entropy (9), the Hawking temperature (10) together with the masses of the black hole and its soliton counterpart are given by

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_W &= -\frac{256}{13} \pi^2 \beta_2 r_h, & T &= \frac{(r_h)^3}{\pi}, \\ \mathcal{M}_{\text{bh}} &= -\frac{64}{13} \pi \beta_2 (r_h)^4, & \mathcal{M}_{\text{sol}} &= \frac{48}{13} 2^{2/3} \beta_2 \pi. \end{aligned} \quad (33)$$

In this case again, it is simple to check that the first law (20) is satisfied. It is somehow appealing that in new massive gravity in three dimensions [24], the Lifshitz black hole solution also exists for a dynamical exponent  $z = 3$ , [7]; this seems to confer a particular status to the value  $z = 3$  concerning the Lifshitz black holes in three dimensions for higher-order gravity theories.

We also note that there exist other solutions within the ansatz (7) and (8), but these latter have a vanishing mass, and hence present a little interest for the present paper.

## B. Generalized Cardy formula

In the previous subsection, we have presented four different families of hyperscaling violation black holes with one of them being a Lifshitz black hole solution. In addition to the first law of thermodynamic (20), the following Smarr formula,

$$\mathcal{M}_{\text{bh}} = \frac{1 + \theta}{z + 1 + \theta} T \mathcal{S}_W, \quad (34)$$

also holds for the four classes of solutions derived previously.

Another important feature shared by these four solutions is that the sign of the coupling constant  $\beta_2$  can always be fixed such that the black hole mass (respectively the mass of its corresponding soliton) is positive (respectively negative). This ensures the soliton to be separated from the black hole spectrum by a gap.

We are now in position to propose a generalized Cardy formula for the model considered here. We will show that the expression of the semiclassical entropy obtained assuming that the ground state is identified with the soliton coincides with the Wald entropy. In order to achieve this task, we make the assumption that the dual field theory is invariant under the following modular transformation:

$$\mathcal{Z}[\beta] = \mathcal{Z}[(2\pi)^{1+\frac{1+\theta}{z}} \beta^{-\frac{1+\theta}{z}}], \quad (35)$$

where  $\beta$  denotes the inverse of the temperature. This allows one to establish a relation between the partition functions at low and high temperature regimes provided that  $(1 + \theta)/z > 0$ . Note that in the Lifshitz case  $\theta = 0$ , this modular transformation reduces to the one derived in [20] by exploiting the existence of an isomorphism between the Lifshitz algebras with dynamical exponents  $z$  and  $z^{-1}$  in  $2d$ . In the hyperscaling case, there does not exist such an isomorphism. In our opinion, this is not surprising since for the hyperscaling violation metric, in contrast with the Lifshitz case, the effective spatial dimensionality does not have a fixed value but explicitly depends on the theory considered.

For each solution with the appropriate sign of the coupling constant  $\beta_2$  such that  $\mathcal{M}_{\text{bh}} > 0$  and  $\mathcal{M}_{\text{sol}} < 0$ , the existence of a gap ensures that the partition function at low temperature is dominated by the contribution of the ground state (the soliton),

$$\mathcal{Z}[\beta] \sim \exp(-\beta \mathcal{M}_{\text{sol}}),$$

and with the use of the duality (35), the partition function at the high temperature regime is approximated as

$$\mathcal{Z}[\beta] \sim \exp(-(2\pi)^{1+\frac{1+\theta}{z}} \beta^{-\frac{1+\theta}{z}} \mathcal{M}_{\text{sol}}).$$

Hence, the asymptotic growth number of states at fixed energy  $\mathcal{M}_{\text{bh}}$  can be obtained from the saddle-point approximation yielding

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi}{1+\theta} \mathcal{M}_{\text{bh}}(1+\theta+z) \left[ -\frac{\mathcal{M}_{\text{sol}}(1+\theta)}{z\mathcal{M}_{\text{bh}}} \right]^{\frac{z}{z+1+\theta}}. \quad (36)$$

Note that in the Lifshitz case ( $\theta = 0$ ), this formula reduces to the one obtained in [20], and it is a matter of check to see that for the four classes of solutions derived previously the expression of the semiclassical entropy coincides with the Wald entropy,  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_W$ . One also remarks that for the hyperscaling violation with Einstein gravity and with a dilaton source, the Cardy formula obtained in [18] differs from (36) by the change  $(1+\theta) \rightarrow (1-\theta)$  which precisely corresponds to the change of the effective spatial dimensionality  $d_{\text{eff}}$ . From this last observation, one can speculate the form of the Cardy formula for a generic effective spatial dimensionality  $d_{\text{eff}}$  whose expression is given by

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi}{d_{\text{eff}}} \mathcal{M}_{\text{bh}}(d_{\text{eff}}+z) \left[ -\frac{\mathcal{M}_{\text{sol}} d_{\text{eff}}}{z\mathcal{M}_{\text{bh}}} \right]^{\frac{z}{d_{\text{eff}}+z}}. \quad (37)$$

As before, this formula can be derived assuming that the partition function is invariant under the following modular transformation:

$$\mathcal{Z}[\beta] = \mathcal{Z}[(2\pi)^{1+\frac{d_{\text{eff}}}{z}} \beta^{-\frac{d_{\text{eff}}}{z}}]. \quad (38)$$

In other words, this means that for a hyperscaling violation black hole whose entropy scales as (1), the form of the generalized Cardy formula will be given by (37). In what follows, we will confirm this guess in a concrete example of a cubic gravity theory where the effective spatial dimensionality will be  $d_{\text{eff}} = 1 + 3\theta$ . Just to conclude this section, let us mention that a Smarr formula can also be obtained in this generic case from the expression of the entropy (37) together with the use of the first law yielding

$$\mathcal{M}_{\text{bh}} = \frac{d_{\text{eff}}}{z + d_{\text{eff}}} TS, \quad (39)$$

and generalizing the expression (34) obtained in the quadratic case.

### III. EXTENSION TO CUBIC GRAVITY THEORY

In order to explore the viability of the generalized Cardy formula (37), we now consider the case of cubic gravity theory in three dimensions with an action given by [25]

$$\begin{aligned} S[g_{\mu\nu}] &= \int d^3x \sqrt{-g} \left( \sum_{i=1}^3 \gamma_i \mathcal{L}_i \right) \\ &= \int d^3x \sqrt{-g} \mathcal{L}, \end{aligned} \quad (40)$$

where

$$\mathcal{L}_1 = R^3, \quad \mathcal{L}_2 = RR^{ab}R_{ab}, \quad \mathcal{L}_3 = R^{ab}R_{bc}R^c{}_a.$$

The field equations obtained by varying the action (40) read [26]

$$\sum_{i=1}^3 \gamma_i G_{(i)ab} = 0, \quad (41)$$

where we have defined

$$\begin{aligned} G_{(1)ab} &= 3R^2 R_{ab} + 3\nabla_p \nabla_q (g_{ab} g^{pq} R^2 - g_a{}^p g_b{}^q R^2) \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{L}_1, \\ G_{(2)ab} &= R_{ab} R^{cd} R_{cd} + 2RR^{cd} R_{acbd} \\ &\quad + \nabla_p \nabla_q (g_{ab} g^{pq} R^{cd} R_{cd} + g^{pq} RR_{ab} \\ &\quad - g_a{}^p g_b{}^q R^{cd} R_{cd} + g_{ab} RR^{pq} - g_b{}^p RR_a{}^q \\ &\quad - g_a{}^p RR_b{}^q) - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{L}_2, \\ G_{(3)ab} &= 3R_{abcd} R^{ec} R_e{}^d + \frac{3}{2} \nabla_p \nabla_q (g^{pq} R_a{}^c R_{bc} \\ &\quad + g_{ab} R^{ep} R_e{}^q - g_b{}^p R^{qc} R_{ac} - g_a{}^p R^{qc} R_{bc}) \\ &\quad - \frac{1}{2} g_{ab} \mathcal{L}_3. \end{aligned}$$

For an ansatz metric of the form (7) and (8), the effective spatial dimensionality (1) will be given by  $d_{\text{eff}} = 1 + 3\theta$ . Let us check the viability of the generalized Cardy formula (37) with the following solution of the field equations (41) found for  $\theta = 1$  and  $z = 6$ :

$$\begin{aligned} ds^2 &= -r^{10} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^4 f(r)} + d\varphi^2, \\ f(r) &= 1 - \left( \frac{r_h}{r} \right)^{10}, \end{aligned} \quad (42)$$

where the coupling constants are tied as

$$\gamma_1 = -\frac{11}{30} \gamma_2 - \frac{3}{20} \gamma_3. \quad (43)$$

In this case, the thermodynamics quantities computed as before yield

$$\begin{aligned} \mathcal{S}_W &= 2880\pi^2 (4\gamma_2 + 3\gamma_3) (r_h)^4, \quad T = \frac{5(r_h)^6}{2\pi}, \\ \mathcal{M}_{\text{bh}} &= 2880\pi (4\gamma_2 + 3\gamma_3) (r_h)^{10}, \end{aligned} \quad (44)$$

and it is simple to check that the first law (20) is satisfied. On the other hand, for the corresponding soliton solution obtained from (18) with  $\alpha = 10$ , the variation of the Noether potential together with the surface term take the following forms:

$$\begin{aligned}\Delta K^{rt} &= -\frac{144}{5}(3\gamma_3 + 4\gamma_2)\sqrt{5}, \\ \int_0^1 ds \Theta^r &= -\frac{288}{5}(3\gamma_3 + 4\gamma_2)\sqrt{5},\end{aligned}\quad (45)$$

giving a unique value for the mass of the soliton which is independent of any integration constant,

$$\mathcal{M}_{\text{sol}} = -\frac{864}{5}\sqrt[3]{5}\pi(3\gamma_3 + 4\gamma_2). \quad (46)$$

As in the quadratic case, there exists a choice of the coupling constants given by  $3\gamma_3 + 4\gamma_2 > 0$  which ensures the mass of the black hole to be positive, and at the same time the mass of its soliton counterpart turns to be negative. Finally, it is easy to see that the generalized Cardy formula (37) with  $d_{\text{eff}} = 1 + 3\theta = 4$  implies as expected that  $\mathcal{S} = \mathcal{S}_W$  for the cubic solution while the Smarr formula (39) is also satisfied.

#### IV. DISCUSSION

The aim of this paper was to guess the possible form for a generalized Cardy formula for the hyperscaling violation metric in three dimensions. In order to achieve this task, we have first stressed that, in contrast with the Lifshitz case, the effective spatial dimensionality defined by the scaling of the entropy in terms of the temperature (1) does not take a fixed value but explicitly depends on the gravity theory considered. For example, in the standard Einstein gravity case  $d_{\text{eff}} = 1 - \theta$  while for quadratic corrections we have  $d_{\text{eff}} = 1 + \theta$  and in the cubic case,  $d_{\text{eff}} = 1 + 3\theta$ . From these observations, we have posited the possible form of the generalized Cardy formula in term of the effective spatial dimensionality  $d_{\text{eff}}$ . As in the Lifshitz case, the ground state is provided by the soliton which is separated from the black hole spectrum by a gap. We have checked the validity of this formula in different examples in the case of quadratic and cubic gravity theories while in the standard Einstein case our formula reduces to the one proposed in [18]. In all these examples, there always exists a choice of the coupling constants that ensures the black hole mass (respectively the soliton mass) to be positive (respectively to be negative) which in turn guarantees the existence of a gap in the spectrum.

Nevertheless, in contrast with the Lifshitz case where the Cardy formula was shown to arise as a consequence of the isomorphism in two dimensions between the Lie algebras with dynamical exponents  $z$  and  $z^{-1}$  [20], in the present case, we do not have such an argument to justify the modular transformation (38). Hence, a natural extension of this work will be to look for a justification of the duality

between the low and high temperature regimes. The exploration of new solutions can also be interesting in order to consolidate the validity of (37). For example, in the quadratic case, there exist more general classes of solutions within the ansatz (7) without imposing the form (8) to the metric function. In fact, the first class of string solution (26) and (27) with  $\theta = 1$  and  $z = 4$  can be promoted to a two-parametric solution as

$$\begin{aligned}ds^2 &= -r^6 f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^4 f(r)} + d\varphi^2, \\ f(r) &= 1 + \frac{a}{r^2} + \frac{a^2}{3r^4} + \frac{b}{r^6},\end{aligned}\quad (47)$$

where  $a$  and  $b$  are two integration constants. Denoting by  $r_h$  the location of the horizon

$$(r_h)^2 = \frac{1}{3}\sqrt[3]{(a^3 - 27b)} - \frac{a}{3},$$

the expressions of the Wald entropy and temperature read

$$\mathcal{S}_W = -\frac{64\pi^2}{3}\beta_2(3r_h^2 + a), \quad T = \frac{(3r_h^2 + a)^2}{6\pi}, \quad (48)$$

while the quasilocal mass which is compatible with the first law involves as well the two integration constants as

$$\mathcal{M}_{\text{bh}} = \frac{32\pi}{27}\beta_2(27b - a^3) = -\frac{32\pi}{27}\beta_2(3r_h^2 + a)^3. \quad (49)$$

This dependence of the mass with respect to the two integration constants is similar to the situation that occurs with the  $z = 1$  AdS black hole solution of new massive gravity [27] where the solution is also two-parametric and, where the two integration constants contribute to the expression of the mass [28]. On the other hand, the soliton counterpart of the solution (47) is shown to have a mass given by (29) and again, it is a simple exercise to check the validity of the Cardy formula (36) and (37) in this case.

Finally, another interesting task will be to explore the charged version of the solutions found here in order to propose as well a charged version of the Cardy formula.

#### ACKNOWLEDGMENTS

We thank Julio Oliva and Edgar Shaghoulian for useful discussions. This work is partially supported by Grant No. 1130423 from FONDECYT and from CONICYT with Grants No. 21120271 and No. 21130136. This project is also partially funded by Proyectos CONICYT–Research Council UK–RCUK–DPI20140053.

- [1] J. M. Maldacena, The large  $N$  limit of superconformal field theories and supergravity, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
- [2] B. Gouteraux and E. Kiritsis, Generalized holographic quantum criticality at finite density, *J. High Energy Phys.* **12** (2011) 036.
- [3] S. Sachdev, The quantum phases of matter, [arXiv:1203.4565](https://arxiv.org/abs/1203.4565).
- [4] C. Charmousis, B. Gouteraux, and E. Kiritsis, Higher-derivative scalar-vector-tensor theories: Black holes, Galileons, singularity cloaking and holography, *J. High Energy Phys.* **09** (2012) 011.
- [5] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan, Gravity duals of Lifshitz-like fixed points, *Phys. Rev. D* **78**, 106005 (2008).
- [6] M. Taylor, Non-relativistic holography, [arXiv:0812.0530](https://arxiv.org/abs/0812.0530).
- [7] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, Lifshitz black hole in three dimensions, *Phys. Rev. D* **80**, 104029 (2009).
- [8] D.-W. Pang, On charged Lifshitz black holes, *J. High Energy Phys.* **01** (2010) 116.
- [9] H. Maeda and G. Giribet, Lifshitz black holes in Brans-Dicke theory, *J. High Energy Phys.* **11** (2011) 015.
- [10] E. Ayón-Beato, M. Bravo-Gaete, F. Correa, M. Hassaine, M. M. Juárez-Aubry, and J. Oliva, First law and anisotropic Cardy formula for three-dimensional Lifshitz black holes, *Phys. Rev. D* **91**, 064006 (2015).
- [11] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine, Thermodynamics of charged Lifshitz black holes with quadratic corrections, *Phys. Rev. D* **91**, 064038 (2015).
- [12] F. Correa, M. Hassaine, and J. Oliva, Black holes in new massive gravity dressed by a (non)minimally coupled scalar field, *Phys. Rev. D* **89**, 124005 (2014).
- [13] A. Alvarez, E. Ayón-Beato, H. A. González, and M. Hassaine, Nonlinearly charged Lifshitz black holes for any exponent  $z > 1$ , *J. High Energy Phys.* **06** (2014) 041.
- [14] X. Dong, S. Harrison, S. Kachru, G. Torroba, and H. Wang, Aspects of holography for theories with hyperscaling violation, *J. High Energy Phys.* **06** (2012) 041.
- [15] M. Alishahiha, E. O. Colgain, and H. Yavartanoo, Charged black branes with hyperscaling violating factor, *J. High Energy Phys.* **11** (2012) 137.
- [16] M. Cadoni and M. Serra, Hyperscaling violation for scalar black branes in arbitrary dimensions, *J. High Energy Phys.* **11** (2012) 136.
- [17] P. Bueno, W. Chemissany, P. Meessen, T. Ortin, and C. S. Shahbazi, Lifshitz-like solutions with hyperscaling violation in ungauged supergravity, *J. High Energy Phys.* **01** (2013) 189.
- [18] E. Shaghoulian, A Cardy formula for holographic hyperscaling-violating theories, [arXiv:1504.02094](https://arxiv.org/abs/1504.02094).
- [19] M. Hassaine, New black holes of vacuum Einstein equations with hyperscaling violation and Nil geometry horizons, *Phys. Rev. D* **91**, 084054 (2015).
- [20] H. A. Gonzalez, D. Tempo, and R. Troncoso, Field theories with anisotropic scaling in 2D, solitons and the microscopic entropy of asymptotically Lifshitz black holes, *J. High Energy Phys.* **11** (2011) 066.
- [21] F. Correa, C. Martinez, and R. Troncoso, Scalar solitons and the microscopic entropy of hairy black holes in three dimensions, *J. High Energy Phys.* **01** (2011) 034.
- [22] W. Kim, S. Kulkarni, and S. H. Yi, Quasilocal Conserved Charges in a Covariant Theory of Gravity, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 081101 (2013); , **112**, 079902(E) (2014).
- [23] Y. Gim, W. Kim, and S. H. Yi, The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited, *J. High Energy Phys.* **07** (2014) 002.
- [24] E. A. Bergshoeff, O. Hohm, and P. K. Townsend, Massive Gravity in Three Dimensions, *Phys. Rev. Lett.* **102**, 201301 (2009).
- [25] T. C. Sisman, I. Gullu, and B. Tekin, All unitary cubic curvature gravities in  $D$  dimensions, *Classical Quantum Gravity* **28**, 195004 (2011).
- [26] J. Oliva and S. Ray, A new cubic theory of gravity in five dimensions: Black hole, Birkhoff's theorem and C-function, *Classical Quantum Gravity* **27**, 225002 (2010).
- [27] J. Oliva, D. Tempo, and R. Troncoso, Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT massive gravity, *J. High Energy Phys.* **07** (2009) 011.
- [28] A. Perez, D. Tempo, and R. Troncoso, Gravitational solitons, hairy black holes and phase transitions in BHT massive gravity, *J. High Energy Phys.* **07** (2011) 093.

---

## Capítulo 8

# Extensión de la Fórmula de Cardy al caso Lifshitz cargado

Considerando el hecho de que para agujeros negros tipo Lifshitz cuya única carga es la masa, su reacción de Smarr es una consecuencia directa de la formula de Cardy anisotrópica (6.4.11), nuestro objetivo es extender la fórmula de Cardy al caso de agujeros negros Lifshitz electricamente cargado satisfaciendo también una relación de Smarr.

Debido a que estamos considerando nuevas configuraciones de agujeros negros, esta vez agujeros negros con carga electromagnética y tomando en cuenta lo visto en las secciones 6.3 y 6.4, podemos notar nuevamente la gran importancia del solitón gravitacional. Para este tipo de configuraciones el solitón sin carga es apropiado como estado fundamental. En este contexto, si consideramos por ejemplo la solución encontrada en [59] considerada en nuestro trabajo, el valor de su masa es cero, pero su entropía no es nula, ya que por supuesto hay otras cargas Noetherianas que interactúan en la primera ley de la termodinámica. El problema surge por el hecho de que el valor de la masa sea cero, ya que entonces la masa del solitón será nula también, esto nos priva aparentemente de una brecha en el espectro de la energía, no pudiendo aproximar nuestra densidad de estados por el método del punto de silla. Pero, al considerar solitones gravitacionales cargados, en nuestro caso magnéticamente le da vida a nueva brecha en el espectro, pudiendo ahora identificar como estado fundamental el solitón con carga.

Para espacio-tiempos de Lifshitz presentados en la sección 6.1, sus propiedades termodinámicas, a pesar de sus comportamientos asintóticos bastante poco convencionales, han sido intensamente estudiadas [80–82]. En este contexto, una de las propiedades más atractivas de los agujeros negros tipo Lifshitz cuya única carga es la masa  $\mathcal{M}$  se refiere a

---

su entropía  $\mathcal{S}$  que escala con respecto a la temperatura  $\mathcal{T}$  como  $\mathcal{S} \propto \mathcal{T}^{\frac{D-2}{z}}$ . Esto último trae por consecuencia que la relación de Smarr [83] es de la forma [84]

$$\mathcal{M} = \frac{D-2}{D+z-2} T\mathcal{S}, \quad (8.0.1)$$

que en tres dimensiones, puede ser obtenida explotando el hecho que las álgebras de Lifshitz en dos dimensiones con exponente dinámico  $z$  y  $z^{-1}$  son isomorfas [23]. En esta última referencia, vista en la sección 6.4, también se obtiene una fórmula en tres dimensiones (6.4.11), donde el estado base es identificado como el solitón obtenido a través de una doble rotación de Wick (sección 6.2). Si aplicamos la primera ley de la termodinámica  $d\mathcal{M} = \mathcal{T}d\mathcal{S}$  a la fórmula de Cardy anisotrópica (6.4.11), tenemos que la masa puede ser expresada como

$$\mathcal{M} = \frac{\mathcal{M}_{\text{sol}}}{z} (2\pi l T)^{1+\frac{1}{z}}, \quad (8.0.2)$$

y combinando las expresiones (6.4.11) y (8.0.2), es fácil obtener la formula de Smarr (8.0.1) para  $D = 3$ . Notar que en este último hemos destacado cierta correlación entre la fórmula de Smarr y la fórmula generalizada de Cardy en tres dimensiones. Como lo que queremos es extender la fórmula (6.4.11) al caso cargado, nos inspiraremos por el hecho de que la relación de Smarr en el caso de soluciones cargadas debe ser una consecuencia de la fórmula de Cardy tal como ocurre en el caso neutral. Esta fórmula de Smarr que generaliza la expresión (8.0.1) puede ser derivada y es escrita genéricamente en [84] como

$$\mathcal{M} = \frac{D-2}{D+z-2} T\mathcal{S} + \alpha \Phi_e \mathcal{Q}_e, \quad (8.0.3)$$

donde  $\Phi_e$  es el potencial eléctrico y  $\mathcal{Q}_e$  la carga eléctrica. En esta expresión, el valor de la constante  $\alpha$  varía en función del Lagrangiano electromagnético considerado, es decir, no depende solamente del exponente dinámico  $z$  y de la dimensión  $D$ , también depende de la teoría considerada.

La expresión de nuestra fórmula depende del exponente dinámico, la energía y la carga del estado base el cual es identificado como un solitón magnéticamente cargado obtenido a través de una doble rotación de Wick, así, nuestra fórmula de Cardy electricamente cargada satisfaciendo una relación de Smarr viene dada por:

$$\mathcal{S} = 2\pi l(z+1) \left( |\mathcal{M}_{\text{sol}} z^{-1} + \alpha \Phi_m \mathcal{Q}_m|^z |\mathcal{M} - \alpha \Phi_e \mathcal{Q}_e| \right)^{\frac{1}{z+1}}, \quad (8.0.4)$$

donde  $\Phi_m$  (respectivamente  $\mathcal{Q}_m$ ) denota el potencial magnético (respectivamente la carga magnética). La expresión (8.0.4) también involucra un factor  $\alpha$  multiplicando los potenciales el cual varía en función de la teoría electromagnética considerada. Este factor es precisamente el mismo que aparece en la fórmula de Smarr para agujeros negros Lifshitz

cargados (8.0.3).

La viabilidad de nuestra fórmula de Cardy se puede probar en diferentes situaciones donde nuestro problema tiene un real interés, estos son agujeros negros Lifshitz electricamente cargados satisfaciendo una relación de Smarr (8.0.3) encontrados en la literatura [57–60, 85–87]. Podemos numerar algunos de los casos con respectivos Lagrangianos electromagnéticos

1.- Caso de gravedad de Einstein con dos campos Abelianos y un dilatón, su Lagrangiano [87] está dado por

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \left( R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i \phi} F_{(i)}^2 \right), \quad (8.0.5)$$

con  $F_{(i)}^2 = F_{(i)\mu\nu} F_{(i)}^{\mu\nu}$  para  $i = 1, 2$ .

2.- Caso de gravedad de Einstein con una electrodinámica no lineal, que introduce su Lagrangiano en [85] como

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \left[ R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} e^{\lambda_1 \phi} F_{(1)}^2 + \left( -\frac{1}{4} e^{\lambda_2 \phi} F_{(2)}^2 \right)^p \right]. \quad (8.0.6)$$

3.- Caso de gravedad de Einstein con una fuente dada por una acción de Proca-Maxwell, cuyo Lagrangiano [59] se escribe como

$$\mathcal{L} = R - 2\Lambda - \frac{1}{4} F_{(1)\alpha\beta} F_{(1)}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2} m^2 A_{(1)\alpha} A_{(1)}^\alpha - \frac{1}{4} F_{(2)\alpha\beta} F_{(2)}^{\alpha\beta} \quad (8.0.7)$$

con  $F_{(i)\alpha\beta} = \partial_\alpha A_{(i)\beta} - \partial_\beta A_{(i)\alpha}$  para  $i = 1, 2$ .

Del mismo modo, se puede extender la Fórmula de Cardy para agujeros negros Lifshitz electricamente cargados a agujeros negros en espacio-tiempos con métrica de violación al hiperescalamiento como

$$\mathcal{S} = \frac{2\pi}{d_{\text{eff}}} (z + d_{\text{eff}}) \left( \left| \frac{\Delta_0}{z} d_{\text{eff}} + \alpha \Phi_m \mathcal{Q}_m \right|^z |\Delta - \alpha \Phi_e \mathcal{Q}_e|^{d_{\text{eff}}} \right)^{\frac{1}{z+d_{\text{eff}}}}. \quad (8.0.8)$$

donde la constante  $\alpha$  aparece en la versión generalizada de la fórmula de Smarr en el caso de violación al hiperescalamiento derivada en [88], esta es

$$\Delta = \frac{d_{\text{eff}}}{z + d_{\text{eff}}} T \mathcal{S} + \alpha \Phi_e \mathcal{Q}_e. \quad (8.0.9)$$

Todo estos resultados corresponden al artículo [2].

**Cardy formula for charged black holes with anisotropic scaling**Moisés Bravo-Gaete,<sup>1,\*</sup> Sebastián Gómez,<sup>2,†</sup> and Mokhtar Hassaine<sup>2,‡</sup><sup>1</sup>*Facultad de Ciencias Básicas, Universidad Católica del Maule, Casilla 617, Talca, Chile*<sup>2</sup>*Instituto de Matemática y Física, Universidad de Talca, Casilla 747 Talca, Chile*

(Received 22 October 2015; published 1 December 2015)

We first observe that for Lifshitz black holes of which the only charge is the mass, the resulting Smarr relation is a direct consequence of the Lifshitz Cardy formula. From this observation, we propose to extend the Cardy formula to the case of electrically charged Lifshitz black holes satisfying as well a Smarr relation. The expression of our formula depends on the dynamical exponent, the energy and the charge of the ground state which is played by a magnetically charged soliton obtained through a double Wick rotation. The expression also involves a factor multiplying the chemical potentials which varies in function of the electromagnetic theory considered. This factor is precisely the one that appears in the Smarr formula for charged Lifshitz black holes. We test the validity of this Cardy formula in different situations where electrically Lifshitz charged black holes satisfying a Smarr relation are known. We then extend these results to electrically charged black holes with hyperscaling violation. Finally, an example in the charged anti-de Sitter case is also provided.

DOI: 10.1103/PhysRevD.92.124002

PACS numbers: 04.70.Bw, 04.70.Dy

**I. INTRODUCTION**

Recently, there has been important interest in extending the ideas underlying the standard relativistic AdS/CFT correspondence [1] to physical systems that exhibit a dynamical scaling near fixed points. The latter are characterized by an anisotropic invariance encoded by the fact that the space and the time scale with different weights,

$$t \rightarrow \lambda^z t, \quad \vec{x} \rightarrow \lambda \vec{x}. \quad (1)$$

The constant  $z$  which is called the dynamical exponent precisely reflects this anisotropic symmetry. In analogy with the anti-de Sitter (AdS) case  $z = 1$ , the gravity dual metric in  $D$  dimensions referred as the Lifshitz metric was given in Ref. [2],

$$ds^2 = -\left(\frac{r}{l}\right)^{2z} dt^2 + \frac{l^2}{r^2} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} \sum_{i=1}^{D-2} dx_i^2, \quad (2)$$

and it is easy to see that the anisotropic transformations (1) together with the rule  $r \rightarrow \lambda^{-1} r$  act as an isometry for this metric. Nevertheless, in contrast with the AdS case, Lifshitz spacetimes or their black hole extensions are not solutions of standard General Relativity and instead require the introduction of some source that may be materialized by some extra fields [3–6] or/and by considering higher-order gravity theories [7–11]. The thermodynamical properties of the Lifshitz black holes, in spite of their rather unconventional asymptotic behaviors, have been intensively studied; see e.g. Refs. [12–14]. One of the most appealing properties

of the Lifshitz black holes of which the only charge is the mass  $\Delta$  concerns their entropy  $\mathcal{S}$  which scales with respect to the temperature  $T$  as

$$\mathcal{S} \propto T^{\frac{D-2}{z}}. \quad (3)$$

As a direct consequence, the Smarr formula [15] takes the following form [16]:

$$\Delta = \frac{D-2}{D+z-2} TS. \quad (4)$$

In three dimensions, this last relation (4) can be obtained by exploiting the fact that the Lifshitz algebras in two dimensions with dynamical exponents  $z$  and  $z^{-1}$  are isomorphic [17]. As shown precisely in this last Ref. [17], this isomorphism is translated into a duality between the low and high temperature regimes and allows one to derive a formula for the asymptotic growth number of states in three dimensions where the ground state is played by the soliton obtained through a double Wick rotation,

$$\mathcal{S} = 2\pi l(z+1) \left[ \left( \frac{\Delta_0}{z} \right)^z \Delta \right]^{\frac{1}{z+1}}, \quad (5)$$

where  $-\Delta_0$  corresponds to the mass of the soliton. In the isotropic case  $z = 1$ , this expression becomes the standard Cardy formula. Note also that the validity of Eq. (5) has been checked in the case of the Lifshitz black hole solution with  $z = 3$  of new massive gravity [7] (see Ref. [17]) and also in the presence of a source given by a nonminimal scalar field for the same gravity theory [5]. The first law  $d\Delta = Td\mathcal{S}$  applied to the relation (5) will then imply that the mass can be expressed as

\*moisesbravog@gmail.com

†sebago@inst-mat.otalca.cl

‡hassaine@inst-mat.otalca.cl

$$\Delta = \frac{\Delta_0}{z} (2\pi l T)^{1+\frac{1}{z}}, \quad (6)$$

and combining together the two expressions (5)–(6), one easily obtains the Smarr formula (4) for  $D = 3$ . Hence from this simple exercise, we have highlighted a certain correlation between the Smarr formula and the generalized Cardy formula in three dimensions.

The main aim of this paper is to extend the formula (5) to the charged case. In doing so, we will inspire ourselves from the fact that the Smarr formula in the case of charged solutions must be a consequence of the Cardy formula as it occurs in the neutral case. This problem has a certain interest since electrically charged Lifshitz black holes have also been found in the current literature; see e.g. Refs. [18–23]. Such examples occur for example in the case of Einstein gravity with a source given by a Proca-Maxwell action [20] or in the presence of  $N$ -Abelians  $U(1)$  fields with a dilaton [24] as well as in the case of nonlinear electrodynamics [21,22]. In all these examples, a Smarr formula generalizing the expression (4) can be derived and is generically written as [16]

$$\Delta = \frac{D-2}{D+z-2} TS + \alpha \Phi_e Q_e, \quad (7)$$

where  $\Phi_e$  is the electric potential and  $Q_e$  the electric charge. In this relation, the value of the constant  $\alpha$  varies in function of the electromagnetic Lagrangian considered. From now on, it is important to emphasize the nonuniversal character of the Smarr formula in the charged case reflected by the presence of the constant  $\alpha$ . In other words, this means that the constant  $\alpha$  does not depend only on the dynamical exponent  $z$  and the dimension  $D$  but also depends on the theory considered as we will see in the different examples listed below.

In this paper, we will show that for electrically charged Lifshitz black holes satisfying a Smarr relation of the form (7) in three dimensions, the Cardy formula (5) becomes

$$S = 2\pi l (z+1) (|\Delta_0 z^{-1} + \alpha \Phi_m Q_m|^z |\Delta - \alpha \Phi_e Q_e|)^{\frac{1}{z+1}}, \quad (8)$$

where  $\Phi_m$  (respectively,  $Q_m$ ) denotes the magnetic potential (respectively, the magnetic charge) of the magnetically charged soliton obtained from the electric solution by means of a double Wick rotation. Since the Wick rotation switches the role of the time coordinate  $t$  with the angular coordinate  $x = \varphi$ , the field strengths of the resulting magnetically charged soliton will be complex in general with a magnetic charge and potential both purely imaginary. Nevertheless, this will not be dramatic since in the proposed formula (8), only their product which is always real appears. The Wick rotation is also responsible for the apparent discrepancy of the sign appearing in front of the constant  $\alpha$  accompanying the magnetic and electric parts in (8).

In what follows, we will test the validity of the formula (8) in different theories where charged Lifshitz black holes satisfying a Smarr formula of the form (7) are known. In each case, we will derive the corresponding magnetically charged soliton and compute the mass of the soliton through the quasilocal method given in Refs. [25,26] as well as their magnetic charge. We will then extend these results to the case of charged hyper-scaling violation black holes. Finally, the last section will be dedicated to some comments regarding the isotropic AdS case  $z = 1$ .

## II. CHARGED LIFSHITZ BLACK HOLE AND SOLITON SOLUTIONS

In all the examples given below, the Lagrangian  $\mathcal{L}$  will involve a gravity part encoded by the metric  $g$  as well as different Abelian fields denoted generically by  $A_{(i)\mu}$  and eventually a scalar field  $\phi$  with its standard kinetic term  $\partial_\mu \phi \partial^\mu \phi$ ,

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}(g, A_{(i)\mu}, \phi). \quad (9)$$

The corresponding action will be given by

$$S[g, \phi, A_{(i)\mu}] = \int d^3x \sqrt{-g} \mathcal{L}. \quad (10)$$

The mass of the charged black hole and soliton will be computed through the quasilocal method described in Refs. [25,26] where the charge  $\Delta$  which corresponds to the mass is given by

$$\Delta(\xi) = \int_{\mathcal{B}} dx_{\mu\nu} \left( \delta K^{\mu\nu}(\xi) - 2\xi^{[\mu} \int_0^1 ds \Theta^{\nu]}(\xi|s) \right). \quad (11)$$

Here  $\delta K^{\mu\nu}(\xi) \equiv K_{s=1}^{\mu\nu}(\xi) - K_{s=0}^{\mu\nu}(\xi)$  denotes the difference of the Noether potential between the interpolated solutions,  $dx_{\mu\nu}$  represents the integration over the codimension-2 boundary  $\mathcal{B}$ ,  $\xi^t = (1, 0, 0)$  is the timelike Killing vector field, and  $\Theta^\nu$  represents the surface term. In the case of a Lagrangian given by (9), the involved quantities are given by

$$\begin{aligned} \Theta^\mu &= 2\sqrt{-g} \left[ P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \nabla_\gamma \delta g_{\alpha\beta} - \delta g_{\alpha\beta} \nabla_\gamma P^{\mu(\alpha\beta)\gamma} \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{2} \sum_i \left( \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_{(i)\nu})} \delta A_{(i)\nu} \right) + \frac{1}{2} \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu \phi)} \delta \phi \right], \quad (12) \\ K^{\mu\nu} &= \sqrt{-g} \left[ 2P^{\mu\nu\rho\sigma} \nabla_\rho \xi_\sigma - 4\xi_\sigma \nabla_\rho P^{\mu\nu\rho\sigma} \right. \\ &\quad \left. - \sum_i \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial (\partial_\mu A_{(i)\nu})} \xi^\sigma A_{(i)\sigma} \right], \quad (13) \end{aligned}$$

where  $P^{\mu\nu\rho\sigma} = \frac{\partial \mathcal{L}}{\partial R_{\mu\nu\rho\sigma}}$  with  $R_{\mu\nu\rho\sigma}$  being the Riemann tensor.

The black hole metric will be parametrized by the following line element,

$$ds^2 = -\frac{r^{2z}}{l^{2z}} f(r) dt^2 + \frac{l^2}{r^2 f(r)} dr^2 + \frac{r^2}{l^2} d\varphi^2, \quad (14)$$

and the ansatz for the gauge fields and eventually the scalar field read

$$A_{(i)\mu} dx^\mu = A_{(i)t}(r) dt, \quad \phi = \phi(r). \quad (15)$$

The Euclidean version of (14) obtained by means of the transformation  $t = i\tau$  requires the Euclidean time to be periodic with period  $\beta = T^{-1}$  in order to avoid conical singularity while the angle keeps identified as  $0 \leq \varphi < 2\pi l$ . Under the Euclidean diffeomorphism defined by

$$(\tau, r, \varphi) \mapsto \left( \bar{\tau} = \left( \frac{2\pi l}{\beta} \right)^{\frac{1}{z}} \varphi, \bar{r} = \frac{\beta}{2\pi z} \left( \frac{r}{l} \right)^z, \bar{\varphi} = \frac{2\pi l}{\beta} \tau \right), \quad (16)$$

the Euclidean Lifshitz black hole is diffeomorphic to another asymptotically Lifshitz solution with dynamical exponent  $z^{-1}$ , scale  $l z^{-1}$  and inverse temperature

$$\bar{\beta} = (2\pi l)^{1+\frac{1}{z}} \beta^{-\frac{1}{z}}, \quad (17)$$

and finally the Lorentzian soliton will be obtained from  $\bar{\tau} = i\bar{t}$  yielding

$$ds^2 = -\left( \frac{z\bar{r}}{l} \right)^{\frac{2}{z}} d\bar{t}^2 + \frac{l^2}{z^2 \bar{r}^2 h(\bar{r})} d\bar{r}^2 + \frac{z^2 \bar{r}^2}{l^2} h(\bar{r}) d\bar{\varphi}^2. \quad (18)$$

As mentioned before, this double Wick rotation will be responsible of the fact that the field strengths of the corresponding soliton will be purely imaginary. Note that in the case of the scalar field which depends only on the radial coordinate, this double Wick rotation does not yield to a complex scalar field for the soliton solution [5]. We may also emphasize that the set of parameters as well as the range of admissible values of the dynamical exponent  $z$  are the same for the electrically charged black hole and for the magnetically charged soliton.

Also in order to simplify the expressions, the volume of the one-dimensional sphere is denoted by  $\Omega_1$  with

$$\Omega_1 = 2\pi l.$$

We are now in a position to check the validity of the expression (8) in different contexts presented below.

### A. Case of Einstein gravity with two Abelian fields and a dilaton

We first analyze the case of Einstein gravity with two Abelian fields and a dilaton for which the Lagrangian reads

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \left( R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} \sum_{i=1}^2 e^{\lambda_i \phi} F_{(i)}^2 \right), \quad (19)$$

with  $F_{(i)}^2 = F_{(i)\mu\nu} F_{(i)}^{\mu\nu}$  for  $i = 1, 2$ .

For an ansatz of the form (14)–(15), the solution given in Ref. [24] reads

$$f(r) = 1 - m \left( \frac{r_h}{r} \right)^{z+1} + (m-1) \left( \frac{r_h}{r} \right)^{2z}, \quad (20a)$$

$$F_{(1)rt} = \sqrt{2(z^2 - 1)} \mu^{\sqrt{\frac{1}{2(z-1)}}} \left( \frac{r}{l} \right)^z, \quad (20b)$$

$$F_{(2)rt} = \sqrt{2(m-1)(z-1)} \mu^{-\sqrt{\frac{z-1}{2}}} \left( \frac{r_h}{l} \right)^z r^{-z}, \quad (20c)$$

$$e^\phi = \mu r^{\sqrt{2(z-1)}}, \quad (20d)$$

where  $m$  and  $\mu$  are two integration constants and  $r_h$  stands for the location of the horizon. Note that we have opted for this parametrization of the solution for latter convenience, but the expressions (20) are equivalent to those given in Ref. [24] after some redefinitions of the constants. This solution is defined provided that the parameters are fixed as follows,

$$\Lambda = -\frac{z(z+1)}{2l^2}, \quad \lambda_1 = -\sqrt{\frac{2}{z-1}}, \quad \lambda_2 = \sqrt{2(z-1)}, \quad (21)$$

while the range for the admissible values of the dynamical exponent is  $z > 1$ .

In this case, the Wald entropy together with the Hawking temperature read

$$\mathcal{S}_w = \frac{2\pi\Omega_1}{\kappa} \left( \frac{r_h}{l} \right), \quad (22a)$$

$$T = \frac{1}{4\pi l} [2z + (1-z)m] \left( \frac{r_h}{l} \right)^z = \frac{\sigma}{l} \left( \frac{r_h}{l} \right)^z, \quad (22b)$$

where we have defined

$$\sigma = \frac{1}{4\pi} [2z + (1-z)m]. \quad (23)$$

On the other hand, the electric charge and electric potential read, respectively,

$$Q_e = \frac{\sqrt{2(m-1)(z-1)} \mu^{\frac{1}{2}\sqrt{2(z-1)}} \Omega_1}{2\kappa l^2} r_h^z \quad (24)$$

and

$$\Phi_e = -A_{(2)t}(r_h) = \frac{\sqrt{2(m-1)}\mu^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2(z-1)}}{\sqrt{z-1}l^z} r_h. \quad (25)$$

Introducing a one-parameter family of locally equivalent solutions, the variation of the Noether potential and the surface term (12)–(13) are given by

$$\begin{aligned} \delta K^{rt} &= -\frac{(z-1)m}{2\kappa l} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{z+1} + \frac{(m-1)r_h^{2z}}{\kappa l^{z+2}} r^{-z+1}, \\ \int_0^1 ds \Theta^r &= \frac{mz}{2\kappa l} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{z+1} - \frac{(m-1)r_h^{2z}}{\kappa l^{z+2}} r^{-z+1}. \end{aligned}$$

From these expressions, we obtain the mass of the Lifshitz black hole to be

$$\Delta = \frac{m\Omega_1}{2\kappa l} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{z+1}, \quad (26)$$

and we easily check that the first law holds:

$$d\Delta = TdS_W + \Phi_e dQ_e. \quad (27)$$

The Smarr formula turns to be

$$\Delta = \frac{1}{z+1} (TS_W + z\Phi_e Q_e) \quad (28)$$

and corresponds to the expression (7) with  $\alpha = \frac{z}{z+1}$ .

The metric function of the corresponding solitonic spacetime (18) is given by

$$h(\bar{r}) = 1 - \frac{m}{(2\pi\sigma)^{\frac{z+1}{z}}} \left(\frac{l}{z\bar{r}}\right)^{\frac{z+1}{z}} + \frac{(m-1)}{(2\pi\sigma)^2} \left(\frac{l}{z\bar{r}}\right)^2, \quad (29)$$

where  $\sigma$  is defined in (23), and the Abelian gauge fields and the dilaton read

$$F_{(1)\bar{r}\bar{\phi}} = i \frac{\sqrt{2(z^2-1)}\mu\sqrt{\frac{1}{2(z-1)}}}{l} \bar{r}^{\frac{1}{z}}, \quad (30a)$$

$$F_{(2)\bar{r}\bar{\phi}} = i \frac{\sqrt{2(m-1)(z-1)}\mu^{-\sqrt{\frac{z-1}{2}}}}{2\pi\sigma z} \bar{r}^{\frac{1-2z}{z}}, \quad (30b)$$

$$e^\phi = \mu \bar{r}^{\frac{\sqrt{2(z-1)}}{z}}. \quad (30c)$$

As before, the variation of the Noether potential and the surface term read

$$\begin{aligned} \delta K^{\bar{r}\bar{t}} &= \frac{1}{2\kappa} \left[ \frac{(m-1)}{2\pi^2\sigma^2 z \bar{r}} \left(\frac{z\bar{r}}{l}\right)^{\frac{1}{z}} - \frac{2m}{(2\pi\sigma)^{\frac{z+1}{z}} l} \right], \\ \int_0^1 ds \Theta^{\bar{r}} &= \frac{1}{2\kappa} \left[ -\frac{(m-1)}{2\pi^2\sigma^2 z \bar{r}} \left(\frac{z\bar{r}}{l}\right)^{\frac{1}{z}} + \frac{m(z+2)}{(2\pi\sigma)^{\frac{z+1}{z}} l} \right], \end{aligned}$$

yielding to

$$\Delta_0 = \frac{zm\Omega_1}{2\kappa l (2\pi\sigma)^{\frac{z+1}{z}}}. \quad (31)$$

Finally, the magnetic charge and potential are, respectively, expressed as

$$Q_m = i \frac{\sqrt{2(m-1)(z-1)}\mu^{\frac{1}{2}}\sqrt{2(z-1)}\Omega_1}{4\pi\sigma z \kappa} \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{1}{z}} \quad (32)$$

and

$$\Phi_m = i \frac{\sqrt{2(m-1)}z\mu^{-\frac{1}{2}}\sqrt{2(z-1)}}{\sqrt{z-1}l} \left(\frac{l}{2\pi\sigma z}\right)^{\frac{1}{z}}. \quad (33)$$

It is then easy to verify that the formula (8) with the parameter  $\alpha = \frac{z}{z+1}$  correctly fits with the expression of the Wald entropy given by Eq. (22a).

## B. Case of Einstein gravity with a nonlinear electrodynamics

In Ref. [22], the authors consider a slight generalization of the previous Lagrangian (19) by introducing a nonlinear term as

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= \frac{1}{2\kappa} \left[ R - 2\Lambda - \frac{1}{2} \partial_\mu \phi \partial^\mu \phi - \frac{1}{4} e^{\lambda_1 \phi} F_{(1)}^2 \right. \\ &\quad \left. + \left( -\frac{1}{4} e^{\lambda_2 \phi} F_{(2)}^2 \right)^p \right]. \quad (34) \end{aligned}$$

We have made some redefinitions of the fields and parameters in the original action [22] such that the Lagrangian (34) reduces to (19) in the linear limiting case  $p = 1$ . Note that such nonlinear generalization of the Maxwell action is being currently studied; see e.g. Ref. [27].

For an ansatz of the form (14)–(15), the metric function given in Ref. [22] after some redefinitions of the constants reads

$$f(r) = 1 - m \left(\frac{r_h}{r}\right)^{z+1} + (m-1) \left(\frac{r_h}{r}\right)^{2z+\Gamma}, \quad (35)$$

where the constant  $\Gamma$  is defined as

$$\Gamma = -\frac{2(p-1)}{2p-1}. \quad (36)$$

For this solution, the uncharged Abelian field  $F_{(1)rt}$ , the dilaton, the cosmological constant and the coupling constants are given by the same expressions than in the linear case; see (20b), (20d) and (21). The only changes are concerned with the charged Abelian gauge field  $F_{(2)rt}$  and

the coupling constant  $\lambda_2$  which now take the following forms,

$$F_{(2)rt} = \frac{\sqrt{2}(r_h)^{\frac{(2z-1)p-z+1}{(2p-1)p}} \Sigma^{\frac{1}{2p}}}{l^{\frac{1+(z-1)p}{p}} \mu^{\frac{(z-1)(2p-1)}{\sqrt{2(z-1)p}}} r^{\frac{2(z-1)p-z+2}{2p-1}}},$$

$$\lambda_2 = \frac{2[2(z-1)p-z+1]}{p\sqrt{2(z-1)}},$$

where for simplicity we have defined

$$\Sigma = \frac{(m-1)[2(z-2)p-z+3]}{(2p-1)^2}. \quad (37)$$

The expression of the entropy as well is unchanged and given by

$$\mathcal{S}_W = \frac{2\pi\Omega_1}{\kappa} \left(\frac{r_h}{l}\right), \quad (38)$$

where  $r_h$  is now the location of the horizon for the metric function (35). The Hawking temperature for this configuration reads

$$T = \frac{1}{l} \left[ \sigma + \frac{(p-1)(m-1)}{2\pi(2p-1)} \right] \left(\frac{r_h}{l}\right)^z = \frac{\bar{\sigma}}{l} \left(\frac{r_h}{l}\right)^z,$$

where we have defined

$$\bar{\sigma} = \sigma + \frac{(p-1)(m-1)}{2\pi(2p-1)}, \quad (39)$$

with  $\sigma$  given by (23). On the other hand, the electric potential together with the electric charge read

$$\Phi_e = \frac{\sqrt{2}(2p-1)(r_h)^{-\frac{[(z-2)p-z+1]}{p}} \Sigma^{\frac{1}{2p}}}{l^{\frac{1+(z-1)p}{p}} [2(z-2)p-z+3] \mu^{\frac{(z-1)(2p-1)}{p\sqrt{2(z-1)}}}}, \quad (40)$$

$$\mathcal{Q}_e = \frac{\sqrt{2}p\mu^{\frac{(z-1)(2p-1)}{p\sqrt{2(z-1)}}} \Sigma^{\frac{2p-1}{2p}} (r_h)^{\frac{(2z-1)p-z+1}{p}} \Omega_1}{2\kappa l^{\frac{3p-1}{p}}}, \quad (41)$$

with  $\Sigma$  given by the expression (37).

Let us now compute the mass of this solution through the quasilocal formalism. For the timelike Killing vector  $\xi^t = (1, 0, 0)$ , and after some tedious but straightforward computations, the surface term together with the variation of the Noether potential (12)–(13) are given by

$$\int_0^1 ds \Theta^r = -\frac{(m-1)(r_h)^{\frac{2(2z-1)p-2z+2}{2p-1}} r^{-\frac{[2(z-2)p-z+3]}{2p-1}}}{\kappa l^{z+2}} + \frac{zm}{2\kappa l} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{1+z},$$

$$\delta K^{rt} = \frac{(m-1)(r_h)^{\frac{2(2z-1)p-2z+2}{2p-1}} r^{-\frac{[2(z-2)p-z+3]}{2p-1}}}{\kappa l^{z+2}} - \frac{(z-1)m}{2\kappa l} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{1+z}.$$

This implies that the mass of the Lifshitz black hole is given by

$$\Delta = \frac{m\Omega_1}{2\kappa l} \left(\frac{r_h}{l}\right)^{z+1},$$

and it is simple to verify that the first law (27) still holds. Additionally, the Smarr formula turns to be

$$\Delta = \frac{1}{z+1} T \mathcal{S}_W + \left[ \frac{z}{1+z} + \frac{(z-1)(p-1)}{(1+z)p} \right] \Phi_e \mathcal{Q}_e$$

and corresponds to the expression (7) with

$$\alpha = \frac{z(2p-1) - (p-1)}{p(z+1)}. \quad (42)$$

As in the linear case, operating the same diffeomorphism (16), the metric function of the corresponding soliton reads

$$h(\bar{r}) = 1 - \frac{m}{(2\pi\bar{\sigma})^{\frac{z+1}{z}}} \left(\frac{l}{z\bar{r}}\right)^{\frac{z+1}{z}} + \frac{(m-1)}{(2\pi\bar{\sigma})^{2+\frac{\Gamma}{z}}} \left(\frac{l}{z\bar{r}}\right)^{2+\frac{\Gamma}{z}}, \quad (43)$$

where  $\bar{\sigma}$  is defined in (39) and  $\Gamma$  is given in (36). As before, the Abelian gauge field  $F_{(1)\bar{r}\bar{\varphi}}$  together with the dilaton are given by (30a) and (30c), respectively, while  $F_{(2)\bar{r}\bar{\varphi}}$  yields

$$F_{(2)\bar{r}\bar{\varphi}} = i\sqrt{2} \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{p-1}{(2p-1)z}} \frac{\bar{\Sigma}^{\frac{1}{2p}}}{\mu^{\frac{(z-1)(2p-1)}{p\sqrt{2(z-1)}}} r^{\frac{4(z-1)p+3-2z}{(2p-1)z}}},$$

where

$$\bar{\Sigma} = \frac{[2(z-2)p+3-z](m-1)}{(2\pi\bar{\sigma})^{2+\frac{\Gamma}{z}} z^2 (2p-1)^2}.$$

For the same timelike Killing vector, the variation of the Noether potential and the surface term yield

$$\delta K^{\bar{r}\bar{t}} = \frac{(m-1)}{\kappa(2\pi\bar{\sigma})^{2+\frac{\Gamma}{z}}} \left(\frac{z\bar{r}}{l}\right)^{\frac{4p-3}{z(2p-1)}} - \frac{m}{\kappa(2\pi\bar{\sigma})^{\frac{z+1}{z}} l},$$

$$\int_0^1 ds \Theta^{\bar{r}} = -\frac{(m-1)}{\kappa(2\pi\bar{\sigma})^{2+\frac{\Gamma}{z}}} \left(\frac{z\bar{r}}{l}\right)^{\frac{4p-3}{z(2p-1)}} + \frac{m(z+2)}{2\kappa(2\pi\bar{\sigma})^{\frac{z+1}{z}} l},$$

yielding to

$$\Delta_0 = \frac{zm\Omega_1}{2\kappa l(2\pi\tilde{\sigma})^{\frac{z+1}{z}}}.$$

The magnetic charge and potential, as before, are purely imaginary and read

$$Q_m = \frac{ip\sqrt{2}}{2\kappa} \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{2p-1}{z}} \sum_{2p}^{\frac{2p-1}{z}} \mu^{\frac{(z-1)(2p-1)}{p\sqrt{2(z-1)}}} \Omega_1, \quad (44)$$

$$\Phi_m = \frac{i\sqrt{2}(2p-1)z}{[2(z-2)p+3-z]} \left(\frac{z}{l}\right)^{\frac{p-1}{(2p-1)z}} \sum_{2p}^{\frac{1}{z}} \mu^{-\frac{(z-1)(2p-1)}{p\sqrt{2(z-1)}}} \\ \times \left(\frac{l}{2\pi\tilde{\sigma}z}\right)^{\frac{|2(z-2)p+3-z|}{(2p-1)z}}. \quad (45)$$

As a matter of check, one can see that all the expressions involved in the nonlinear case reduce to those obtained in the previous subsection in the linear limiting case  $p = 1$ .

Finally, it is straightforward to check that the formula (8) with  $\alpha$  given by (42) fits perfectly with the Wald formula (38).

### C. Case of Einstein gravity with a Proca and Maxwell fields

We now consider the case of Einstein gravity with a Proca field  $A_{(1)\mu}$  together with a Maxwell field  $A_{(2)\mu}$  of which the Lagrangian is given by

$$\mathcal{L} = R - 2\Lambda - \frac{1}{4}F_{(1)\alpha\beta}F_{(1)}^{\alpha\beta} - \frac{1}{2}m^2A_{(1)\alpha}A_{(1)}^\alpha - \frac{1}{4}F_{(2)\alpha\beta}F_{(2)}^{\alpha\beta} \quad (46)$$

with  $F_{(i)\alpha\beta} = \partial_\alpha A_{(i)\beta} - \partial_\beta A_{(i)\alpha}$  for  $i = 1, 2$ .

In this case, the electrically charged Lifshitz black hole solution exists only for  $z = 2$ ; the metric function (14) and the Proca and Maxwell fields read [20]

$$f(r) = 1 - \left(\frac{r_h}{r}\right)^2, \quad A_{(1)t}(r) = \left(\frac{r}{l}\right)^2 f(r), \\ F_{(2)tr}(r) = \frac{\sqrt{2}}{l^2} r_h, \quad (47)$$

while the parameters must be fixed as follows:

$$m = \frac{\sqrt{2}}{l}, \quad \Lambda = -\frac{5}{2l^2}.$$

For this solution, the Wald entropy  $\mathcal{S}_W$  and the Hawking temperature are given by

$$\mathcal{S}_W = \frac{4\pi r_h \Omega_1}{l}, \quad T = \frac{r_h^2}{2\pi l^3}. \quad (48)$$

The expressions of the surface term and Noether potential (12)–(13) read

$$\int_0^1 ds \Theta^r = \frac{2rr_h^2}{l^4}, \quad \delta K^{rt} = -\frac{2rr_h^2}{l^4}, \quad (49)$$

which in turn implies that the mass  $\Delta = 0$ . This solution with vanishing mass can be interpreted as an extremal charged Lifshitz black hole as it occurs for examples in Refs. [12,14,28]. Nevertheless, the electric charge  $Q_e$  and the electric potential  $\Phi_e$  are nonvanishing and given by

$$Q_e = \frac{\sqrt{2}\Omega_1}{l} \left(\frac{r_h}{l}\right), \quad \Phi_e = -\sqrt{2} \left(\frac{r_h}{l}\right)^2. \quad (50)$$

It is easy to verify that the first law of thermodynamics holds,

$$d\Delta = 0 = Td\mathcal{S}_W + \Phi_e dQ_e, \quad (51)$$

and the Smarr formula (7) reads in this case

$$\Delta = 0 = \frac{1}{3}(T\mathcal{S}_W + \Phi_e Q_e); \quad (52)$$

that is, the constant  $\alpha$  appearing in the generic formula (7) is  $\alpha = \frac{1}{3}$ .

The corresponding soliton is given by the line element (18) with  $z = 2$  where the metric function and the gauge fields are given by

$$h(\bar{r}) = 1 - \frac{l}{2\bar{r}}, \quad A_{(1)\bar{\varphi}} = 2i \left(\frac{\bar{r}}{l}\right) h(\bar{r}), \quad F_{(2)\bar{r}\bar{\varphi}} = i(l\bar{r})^{-1/2}. \quad (53)$$

Along the same lines as before, the Noether potential together with the surface term take the following forms,

$$\int_0^1 ds \Theta^{\bar{r}} = \frac{2}{l} \left(\frac{2\bar{r}}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad \Delta K^{\bar{r}\bar{i}} = -\frac{2}{l} \left(\frac{2\bar{r}}{l}\right)^{\frac{1}{2}}, \quad (54)$$

and as in the electric case, the mass of the soliton is vanishing  $\Delta_0 = 0$ . The magnetic charge and potential are purely imaginary and read

$$Q_m = i \frac{\sqrt{2}}{l} \Omega_1, \quad \Phi_m = -i\sqrt{2}, \quad (55)$$

and it is a matter of check that the formula (8) with  $z = 2$  and  $\alpha = 1/3$  fits perfectly with the Wald formula (48).

### III. GENERALIZATION FOR CHARGED LIFSHITZ BLACK HOLES WITH HYPERSCALING VIOLATION

In the anisotropic extension of the AdS/CFT correspondence, there exists another dual metric of interest, the so-called hyperscaling violation spacetime of which the line element can be parametrized as follows:

$$ds^2 = \frac{1}{r^{\frac{2\theta}{D-2}}} \left[ -r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2} + r^2 d\vec{x}^2 \right]. \quad (56)$$

In this case, the anisotropic transformations (1) together with  $r \rightarrow \lambda^{-1} r$  act rather like a conformal transformation,  $ds^2 \rightarrow \lambda^{2\theta/(D-2)} ds^2$ . Note also that this metric reduces to the Lifshitz metric (2) in the limiting case  $\theta = 0$ .

In Refs. [29,30], it was shown that if the entropy  $S$  scales with respect to the temperature  $T$  as

$$S \sim T^{\frac{d_{\text{eff}}}{z}}, \quad (57)$$

where  $d_{\text{eff}}$  is the effective spatial dimensionality, and where  $z$  is the dynamical exponent, the formula (5) in the uncharged case becomes

$$S = \frac{2\pi}{d_{\text{eff}}} (z + d_{\text{eff}}) \left( \frac{\Delta_0 d_{\text{eff}}}{z} \right)^{\frac{z}{z+d_{\text{eff}}}} \Delta^{\frac{d_{\text{eff}}}{z+d_{\text{eff}}}}. \quad (58)$$

Repeating the same exercise as in the Lifshitz case, the first law  $d\Delta = TdS$  allows one to express the mass as

$$\Delta = (2\pi T)^{\frac{z+d_{\text{eff}}}{z}} \left( \frac{\Delta_0 d_{\text{eff}}}{z} \right), \quad (59)$$

and the Smarr formula becomes

$$\Delta = \frac{d_{\text{eff}}}{z + d_{\text{eff}}} TS. \quad (60)$$

We may note that the expressions (57)–(60) with  $d_{\text{eff}} = 1$  reduce to those obtained in the Lifshitz case.

Now by a certain analogy with the charged Lifshitz case, the Cardy formula for electrically charged black holes with hyperscaling violation should be

$$S = \frac{2\pi}{d_{\text{eff}}} (z + d_{\text{eff}}) \left( \left| \frac{\Delta_0}{z} d_{\text{eff}} + \alpha \Phi_m \mathcal{Q}_m \right|^z \left| \Delta - \alpha \Phi_e \mathcal{Q}_e \right|^{d_{\text{eff}}} \right)^{\frac{1}{z+d_{\text{eff}}}}. \quad (61)$$

As before, the constant  $\alpha$  is the one appearing in the charged version of the Smarr formula in the hyperscaling case, namely

$$\Delta = \frac{d_{\text{eff}}}{z + d_{\text{eff}}} TS + \alpha \Phi_e \mathcal{Q}_e. \quad (62)$$

Let us now verify this formula for the charged hyperscaling violation black hole derived in Ref. [31] for which the Lagrangian is given by

$$\mathcal{L} = \frac{1}{2\kappa} \left( R - \frac{1}{2} (\partial\phi)^2 + V(\phi) - \sum_{i=1}^2 \frac{1}{4} e^{\lambda_i \phi} F_{(i)\mu\nu} F^{(i)\mu\nu} \right), \quad (63)$$

where the potential is

$$V(\phi) = -2\Lambda e^{\gamma\phi}.$$

The solution as reported in Ref. [31], again after some redefinitions of the constant, reads

$$ds^2 = \frac{1}{r^{2\theta}} \left[ -r^{2z} f(r) dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 f(r)} + r^2 d\vec{\varphi}^2 \right], \quad (64)$$

where

$$f(r) = 1 - m \left( \frac{r_h}{r} \right)^{z+1-\theta} + (m-1) \left( \frac{r_h}{r} \right)^{2z-2\theta}, \quad (65a)$$

$$F_{(1)rt} = \sqrt{2(z-1)(1-\theta+z)} \mu^{\frac{\sqrt{2}}{2\sqrt{(1-\theta)(z-\theta-1)}}} r^{z-\theta}, \quad (65b)$$

$$F_{(2)rt} = \sqrt{2(1-\theta)(z-\theta-1)(m-1)} \mu^{-\frac{\sqrt{z-\theta-1}\sqrt{2}}{2\sqrt{1-\theta}}} \left( \frac{r_h}{r} \right)^{z-\theta}, \quad (65c)$$

$$e^\phi = \mu r \sqrt{2(1-\theta)(z-\theta-1)}, \quad (65d)$$

while the parameters are fixed as

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= -\sqrt{\frac{2}{(1-\theta)(z-\theta-1)}}, & \lambda_2 &= \sqrt{\frac{2(z-\theta-1)}{1-\theta}}, \\ \Lambda &= \frac{1}{2} (1-\theta+z)(z-\theta) \mu^{\frac{\theta\sqrt{2}}{\sqrt{(1-\theta)(z-\theta-1)}}}, \\ \gamma &= \frac{2\theta}{\sqrt{2(1-\theta)(z-\theta-1)}}. \end{aligned} \quad (66)$$

For this solution, the Wald entropy is given by

$$S_W = \frac{2\pi r_h^{1-\theta} \Omega_1}{\kappa}, \quad (67)$$

while the Hawking temperature is

$$T = \frac{[(m-2)\theta - m(z-1) + 2z] r_h^z}{4\pi} = \rho r_h^z, \quad (68)$$

where for simplicity we define

$$\rho = \frac{(m-2)\theta}{4\pi} + \sigma, \quad (69)$$

with  $\sigma$  given in (23). In this case, the electric charge together with the potential read, respectively,

$$Q_e = \frac{\sqrt{2(1-\theta)(z-\theta-1)(m-1)}\mu^{\frac{\sqrt{2(z-\theta-1)}}{2\sqrt{1-\theta}}} r_h^{z-\theta}\Omega_1}{2\kappa}, \quad (70)$$

$$\Phi_e = \sqrt{\frac{2(1-\theta)(m-1)}{z-\theta-1}}\mu^{-\frac{\sqrt{2(z-\theta-1)}}{2\sqrt{1-\theta}}} r_h. \quad (71)$$

The variation of the Noether potential together with the surface term are obtained as

$$\begin{aligned} \delta K^{rt} &= -\frac{(z-\theta-1)mr_h^{1-\theta+z}}{2\kappa} \\ &\quad - \frac{(m-1)(\theta-1)r_h^{2z-2\theta}}{\kappa} r^{\theta-z+1}, \\ \int_0^1 ds \Theta^r &= \frac{(z-2\theta)mr_h^{1-\theta+z}}{2\kappa} \\ &\quad + \frac{(m-1)(\theta-1)r_h^{2z-2\theta}}{\kappa} r^{\theta-z+1}, \end{aligned} \quad (72)$$

yielding to the same expression of the mass as the one found in Ref. [31], namely

$$\Delta = \frac{m(1-\theta)\Omega_1}{2\kappa} r_h^{1-\theta+z}. \quad (73)$$

From all these expressions, one can easily check the validity of the first law while the effective spatial dimensionality is given by

$$d_{\text{eff}} = 1 - \theta, \quad (74)$$

and the Smarr formula (62) is realized with a constant  $\alpha$  chosen as

$$\alpha = \frac{z-\theta}{z+1-\theta}. \quad (75)$$

On the other hand, the soliton counterpart for the hyperscaling violation metric (64) with the metric function (65a), obtained through a double Wick rotation, has the following form,

$$ds^2 = \frac{1}{r^{2\theta}} \left[ -r^{2z} dt^2 + \frac{dr^2}{r^2 h(r)} + r^2 h(r) d\vec{\varphi}^2 \right], \quad (76)$$

where the metric function  $h$  is defined as

$$h(r) = 1 - \frac{m}{(2\pi\rho)^{\frac{1+z-\theta}{z}} r^{1+z-\theta}} + \frac{(m-1)}{(2\pi\rho)^{\frac{2z-2\theta}{z}} r^{2z-2\theta}}, \quad (77)$$

with  $\rho$  being given by Eq. (69). The gauge fields read in this case

$$F_{(1)r\varphi} = i\sqrt{2(z-1)(1-\theta+z)}\mu^{\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{(1-\theta)(z-\theta-1)}}} r^{z-\theta}, \quad (78)$$

$$F_{(2)r\varphi} = -i\sqrt{\frac{2(1-\theta)(m-1)}{(z-\theta-1)}}\mu^{-\frac{\sqrt{2(z-\theta-1)}}{2\sqrt{1-\theta}}} \left(\frac{1}{2\pi\rho}\right)^{\frac{z-\theta}{z}} r^{-z+\theta+1}, \quad (79)$$

while the dilaton is given by Eq. (65d).

As before, choosing the Killing vector  $\xi^t = (1, 0, 0)$ , the variation of the Noether potential and the surface term are calculated as

$$\begin{aligned} \delta K^{rt} &= -\frac{(\theta-1)(m-1)}{\kappa(2\pi\rho)^{\frac{2z-2\theta}{z}} r^{z-\theta-1}} + \frac{(\theta-1)m}{\kappa(2\pi\rho)^{\frac{1-\theta+z}{z}}}, \\ \int_0^1 ds \Theta^r &= \frac{(\theta-1)(m-1)}{\kappa(2\pi\rho)^{\frac{2z-2\theta}{z}} r^{z-\theta-1}} + \frac{(z+2-2\theta)m}{2\kappa(2\pi\rho)^{\frac{1-\theta+z}{z}}}, \end{aligned}$$

which, in turn, implies that

$$\Delta_0 = \frac{zm\Omega_1}{2\kappa(2\pi\rho)^{\frac{1+z-\theta}{z}}}. \quad (80)$$

Finally, the magnetic charge and the magnetic potential read

$$\begin{aligned} Q_m &= \frac{i\sqrt{2(1-\theta)(z-\theta-1)(m-1)}\mu^{\frac{\sqrt{2(z-\theta-1)}}{2\sqrt{1-\theta}}}\Omega_1}{2\kappa(2\pi\rho)^{\frac{z-\theta}{z}}}, \\ \Phi_m &= i\sqrt{\frac{2(1-\theta)(m-1)}{z-\theta-1}}\mu^{-\frac{\sqrt{2(z-\theta-1)}}{2\sqrt{1-\theta}}} \left(\frac{1}{2\pi\rho}\right)^{\frac{1}{z}}. \end{aligned} \quad (81)$$

Once again, it is easy to verify that the formula (61) with the parameter  $\alpha$  given by (75) correctly fits with the Wald entropy defined in (67).

#### IV. CASE OF ADS CHARGED BLACK HOLES

We now consider the isotropic AdS case which corresponds to a dynamical exponent  $z = 1$ . There exist examples of electrically charged AdS black holes in three dimensions, and the most popular one is the charged Banados-Teitelboim-Zanelli (BTZ) solution [32]. Unfortunately in this case, because of the logarithmic behavior of the Maxwell electric gauge field, there is not such a Smarr formula (7) encoding the charged BTZ solution. As a direct consequence, the Cardy formula given in (8) is no longer valid in such a situation. Nevertheless, as

shown in Refs. [33,34], considering instead a nonlinear version of the Maxwell action (as the one used in Sec. II B) and eventually a scalar field nonminimally and conformally coupled, there exists an electrically AdS charged black hole such that the electric gauge field  $A_t(r)$  exhibits a Coulombian behavior, that is  $A_t(r) \sim r^{-1}$ . In what follows, we shall consider such a particular solution that satisfies a Smarr relation (7) and show again that the Cardy formula (8) will reproduce the correct value of the entropy.

We deal with the Lagrangian reported in Ref. [34],

$$\mathcal{L} = \frac{R + 2l^{-2}}{2\kappa} - \frac{1}{2}(\partial\phi)^2 - \frac{1}{16}R\phi^2 - \lambda\phi^6 + \sigma(-F_{\mu\nu}F^{\mu\nu})^{3/4}, \quad (82)$$

where the matter part of the action (the scalar field and the nonlinear electromagnetic action) is chosen such that it enjoys the conformal invariance. The solution we consider for testing the Cardy formula (8) is given by the simplest one found in Refs. [34],

$$f(r) = 1 + \frac{24\lambda b^2 l^2}{r^2}, \quad \phi(r) = \sqrt{\frac{b}{r}}, \quad F_{rt} = \frac{q}{r^2}, \quad (83)$$

where  $f(r)$  is the metric function of the line element (14) with  $z = 1$  and  $|q|^{3/2} = -\lambda b^3$ . The constant  $b$  is strictly positive, while  $\lambda$  is negative. In this particular case, the quantities of interest read [34]

$$\Delta = \frac{\pi r_h^2}{\kappa l^2}, \quad T = \frac{r_h}{2\pi l^2}, \quad S_W = \left(1 - \frac{\kappa}{8l\sqrt{-24\lambda}}\right) \frac{4\pi^2 r_h}{\kappa},$$

$$Q_e = \frac{6\pi(-\lambda)^{1/3}}{\sqrt{-24\lambda l}} r_h, \quad \Phi_e = \frac{r_h}{24l^2(-\lambda)^{1/3}}, \quad (84)$$

where the location of the horizon  $r_h$  is defined by  $r_h^2 = -24\lambda b^2 l^2$  and for simplicity we have assumed that  $q > 0$ . Having in hands all these quantities, one easily verifies that a Smarr relation (7) is satisfied with  $\alpha = 1/2$ .

The corresponding soliton solution is described by

$$g(\bar{r}) = 1 - \frac{l^2}{\bar{r}^2}, \quad \phi(\bar{r}) = \left(\frac{1}{24(-\lambda)}\right)^{1/4} \sqrt{\frac{1}{\bar{r}}},$$

$$F_{\bar{r}\bar{\phi}}(\bar{r}) = \frac{i}{24(-\lambda)^{1/3}\bar{r}^2}, \quad (85)$$

where  $g(\bar{r})$  is the metric function of (18) with  $z = 1$ . We may note that, as said before, the double Wick rotation does not yield to a complex scalar field for the soliton solution.

Along the same lines as before, the surface term together with the variation of the Noether potential are given by

$$\int_0^1 ds \Theta^{\bar{r}} = \frac{\sqrt{6}\bar{r}}{48l^3\sqrt{-\lambda}} - \frac{\sqrt{6}}{48l\sqrt{-\lambda}\bar{r}} + \frac{3}{2\kappa l},$$

$$\delta K^{\bar{r}\bar{i}} = -\frac{\sqrt{6}\bar{r}}{48l^3\sqrt{-\lambda}} + \frac{\sqrt{6}}{48l\sqrt{-\lambda}\bar{r}} - \frac{1}{\kappa l}, \quad (86)$$

yielding to

$$\Delta_0 = \frac{1}{2\kappa l} \Omega_1 = \frac{\pi}{\kappa}.$$

Finally, the magnetic charge and magnetic potential read

$$Q_m = \frac{i\sqrt{6}\pi}{2(-\lambda)^{1/6}}, \quad \Phi_m = \frac{i}{24l(-\lambda)^{1/3}}. \quad (87)$$

Hence, as in the anisotropic case, the charged version of the Cardy formula (8) with  $\alpha = 1/2$  and  $z = 1$  gives the correct value of the entropy (84).

## V. CONCLUDING REMARKS

Our starting point was the observation that in the case of Lifshitz black holes of which the only charge is the mass, the general asymptotic formula for the asymptotic growth of number of states derived in Ref. [17] naturally implies the emergence of a Smarr formula given by (4) in  $D = 3$ . In our search of generalizing the Cardy formula to the case of electrically charged Lifshitz black holes, we have proposed a formula compatible with a charged version of the Smarr formula of the form (7). We have tested the viability of this formula in three different examples where charged Lifshitz black holes obeying a Smarr relation were known. We have extended our analysis to the other class of charged black hole solutions with anisotropic symmetry, namely those exhibiting a hyperscaling violation.

In the case of the isotropic charged AdS black holes, we have shown that the absence of a Smarr relation for the charged BTZ solution renders our formula (8) inappropriate. The absence of a Smarr relation of the form (7) is mainly due to the logarithmic behavior of the Maxwell gauge field. It seems that in this case, the appropriate formula should be the Cardy-Verlinde formula [35] where the Smarr relation is augmented by a pressure term; see Ref. [36]. Nevertheless, charged AdS black holes have a U(1)-corrected Cardy formula which accounts for their entropy; see e.g. Ref. [37].

Nevertheless, replacing the standard Maxwell theory by its nonlinear and conformal generalization, asymptotically charged AdS black holes are known with a gauge field behaving as a Coulomb one. In a simple example of such a solution given in Ref. [34], we have again tested the viability of the Cardy formula after ensuring that this Coulombian solution was as well satisfying a Smarr relation.

As a natural extension of this work, it will be desirable to test this formula in many more examples, particularly those involving higher-order gravity theories in three dimensions. This task can be interesting by itself in the hyperscaling violation case, since as shown in Ref. [30], the spatial effective dimensionality  $d_{\text{eff}}$  may vary in function of the order of the gravity theories involved in the action.

Also there exists a generalization of the Smarr relation in the case of AdS black holes for which the cosmological constant is viewed as a dynamical variable. In a very recent paper, the authors of Ref. [38] showed that such a generalization of the Smarr relation can be

understood from a dual holographic point of view. Extension to the Lifshitz case can also be an interesting work to deal with.

## ACKNOWLEDGMENTS

This work is partially supported by Grant No. 1130423 from FONDECYT and by CONICYT with Grant No. 21130136. This project is also partially funded by Proyectos CONICYT- Research Council UK—RCUK - DPI20140053. We thank Edgar Shagouliau for nice correspondence.

- 
- [1] J. M. Maldacena, *Adv. Theor. Math. Phys.* **2**, 231 (1998).
  - [2] S. Kachru, X. Liu, and M. Mulligan, *Phys. Rev. D* **78**, 106005 (2008).
  - [3] T. Azeyanagi, W. Li, and T. Takayanagi, *J. High Energy Phys.* **06** (2009) 084.
  - [4] F. Correa, M. Hassaine, and J. Oliva, *Phys. Rev. D* **89**, 124005 (2014).
  - [5] E. Ayn-Beato, M. Bravo-Gaete, F. Correa, M. Hassane, M. M. Jurez-Aubry, and J. Oliva, *Phys. Rev. D* **91**, 064006 (2015).
  - [6] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **89**, 104028 (2014).
  - [7] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **80**, 104029 (2009).
  - [8] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* **04** (2010) 030.
  - [9] H. Lu, Y. Pang, C. N. Pope, and J. F. Vazquez-Poritz, *Phys. Rev. D* **86**, 044011 (2012).
  - [10] A. Giacomini, G. Giribet, M. Leston, J. Oliva, and S. Ray, *Phys. Rev. D* **85**, 124001 (2012).
  - [11] J. Oliva and S. Ray, *Phys. Rev. D* **86**, 084014 (2012).
  - [12] H. S. Liu and H. Lu, *J. High Energy Phys.* **12** (2014) 071.
  - [13] D. O. Devecioglu and O. Sarioglu, *Phys. Rev. D* **83**, 124041 (2011).
  - [14] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **91**, 064038 (2015).
  - [15] L. Smarr, *Phys. Rev. Lett.* **30**, 71 (1973); **30**, 521(E) (1973).
  - [16] W. G. Brenna, R. B. Mann, and M. Park, *Phys. Rev. D* **92**, 044015 (2015).
  - [17] H. A. Gonzalez, D. Tempo, and R. Troncoso, *J. High Energy Phys.* **11** (2011) 066.
  - [18] M. Taylor, [arXiv:0812.0530](https://arxiv.org/abs/0812.0530).
  - [19] U. Danielsson and L. Thorlacius, *J. High Energy Phys.* **03** (2009) 070.
  - [20] D. W. Pang, *J. High Energy Phys.* **01** (2010) 116.
  - [21] A. Alvarez, E. Ayon-Beato, H. A. Gonzalez, and M. Hassaine, *J. High Energy Phys.* **06** (2014) 041.
  - [22] M. K. Zangeneh, A. Sheykhi, and M. H. Dehghani, *Phys. Rev. D* **92**, 024050 (2015).
  - [23] M. H. Dehghani, C. Shakuri, and M. H. Vahidinia, *Phys. Rev. D* **87**, 084013 (2013).
  - [24] J. Tarrío and S. Vandoren, *J. High Energy Phys.* **09** (2011) 017.
  - [25] W. Kim, S. Kulkarni, and S.-H. Yi, *Phys. Rev. Lett.* **111**, 081101 (2013).
  - [26] Y. Gim, W. Kim, and S. H. Yi, *J. High Energy Phys.* **07** (2014) 002.
  - [27] M. Hassaine and C. Martinez, *Phys. Rev. D* **75**, 027502 (2007); *Classical Quantum Gravity* **25**, 195023 (2008); S. H. Hendi, S. Panahiyan, and H. Mohammadpour, *Eur. Phys. J. C* **72**, 2184 (2012); S. H. Hendi, *Adv. High Energy Phys.* **2014**, 697863 (2014).
  - [28] T. Zingg, *J. High Energy Phys.* **09** (2011) 067.
  - [29] E. Shagouliau, [arXiv:1504.02094](https://arxiv.org/abs/1504.02094).
  - [30] M. Bravo-Gaete, S. Gomez, and M. Hassaine, *Phys. Rev. D* **91**, 124038 (2015).
  - [31] M. H. Dehghani, A. Sheykhi, and S. E. Sadati, *Phys. Rev. D* **91**, 124073 (2015).
  - [32] M. Banados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *Phys. Rev. Lett.* **69**, 1849 (1992).
  - [33] M. Cataldo, N. Cruz, S. del Campo, and A. Garcia, *Phys. Lett. B* **484**, 154 (2000).
  - [34] M. Cardenas, O. Fuentealba, and C. Martinez, *Phys. Rev. D* **90**, 124072 (2014).
  - [35] E. P. Verlinde, [arXiv:hep-th/0008140](https://arxiv.org/abs/hep-th/0008140).
  - [36] M. R. Setare and M. Jamil, *Phys. Lett. B* **681**, 469 (2009).
  - [37] P. Kraus, *Lect. Notes Phys.* **755**, 1 (2008).
  - [38] A. Karch and B. Robinson, [arXiv:1510.02472](https://arxiv.org/abs/1510.02472).

---

---

## Capítulo 9

# Conclusión

A lo largo de esta tesis, hemos recorrido la historia de la física y del formalismo matemático en que esta se apoya. Comenzamos en 1915 con el nacimiento de la relatividad de Einstein, el formalismo lagrangiano como método para derivar las ecuaciones de Einstein, y los agujeros negros clásicos que son determinados por estas. Como uno de los puntos más importantes de las bases de esta investigación, se presenta la termodinámica de agujeros negros, ya que gracias a sus postulados nos es posible caracterizar estas soluciones de agujeros negros a través de los parámetros termodinámicos descritos en el capítulo 3: temperatura, masa y entropía, siendo claramente esta última el centro de esta investigación. Aquí pudimos observar como los agujeros negros pueden irradiar partículas de varias energías, lo cual asociamos a una temperatura, conocida como la temperatura de Hawking. La entropía de un agujero negro también es medible, esta es proporcional a su superficie y es conocida como entropía de Bekenstein-Hawking. La termodinámica de los agujeros negros involucra tanto la gravedad clásica como la mecánica cuántica. Estudiar los orígenes de la radiación de Hawking y los orígenes que conducen a la entropía de Bekenstein-Hawking podrían darnos una idea para construir una teoría de la gravedad cuántica.

De la teoría de campos conforme, vista en el capítulo 4, podemos ver que el caso 2-dimensional es una teoría cuántica de campos altamente simétrica y tiene un álgebra definida por 2 copias del álgebra de Virasoro, la cual es la extensión cuántica del álgebra de Witt. Para estudiar CFT sobre un toro necesitamos invariancia modular. Uno de los resultados clásicos de Cardy es la invariancia modular de una función de partición que nos permite derivar la fórmula de Cardy, que relaciona el logaritmo de la densidad de estados de un sistema y, por tanto, la entropía de una teoría de campos conforme. La métrica AdS es una solución a las ecuaciones de campo en el vacío de Einstein con una constante

---

cosmológica negativa. Otra solución de estas ecuaciones de campo es la solución BTZ la cual es  $(2 + 1)$ -dimensional y se reduce asintóticamente a un espacio-tiempo  $\text{AdS}_3$ . Brown y Henneaux mostraron que para el espacio-tiempo asintóticamente  $\text{AdS}_3$ , sus simetrías asintóticas forman dos copias del álgebra de Virasoro con una carga central específica. Strominger utilizó este resultado, incluyendo su carga central, para mostrar que la entropía de un agujero negro BTZ obtenida a través la fórmula de Cardy, coincide con la expresión dada por la entropía de Bekenstein Hawking. Hoy en día tanto el resultado de Brown y Henneaux como el de Strominger son interpretados en términos de la correspondencia AdS/CFT propuesta por J. Maldacena, en la cual se conjetura que una teoría gravitatoria en el espacio-tiempo AdS corresponde a través de esta dualidad a una teoría de campos conforme en dimensión menor.

Los espacio-tiempos que son motivos de estudio en esta tesis fueron presentados en el capítulo 6, estos son los espacio-tiempos de Lifshitz y de violación al hiperescalamiento. Éstos nacen de la idea de extender la correspondencia de Maldacena a espacios no relativistas, con el fin de entender campos de la física experimentalmente accesibles como la física de materia condensada. Estos sistemas disfrutan de un escalamiento anisotrópico y su métrica dual es la métrica de Lifshitz. Esta métrica no es solución de las ecuaciones de Einstein en el vacío, por lo que se requiere la introducción de alguna fuente de materia o considerar términos de curvatura que sean de orden superior, como curvaturas cuadráticas o cúbicas en nuestro caso. Estos sistemas constan de una propiedad llamada hiperescalamiento, la que nos dice que la entropía escala con respecto a la temperatura como la dimensionalidad espacial dividida por el exponente dinámico. Junto con estos, también existen sistemas de este tipo que muestran una violación a este hiperescalamiento, en los cuales la energía libre es proporcional a la dimensionalidad espacial. Esto último se ve reflejado en el hecho de que la entropía escala con respecto a temperatura elevado a un factor que no solo depende de la dimensionalidad espacial, sino que ahora depende de lo que se conoce como dimensionalidad espacial efectiva, denotada como  $d_{\text{eff}}$ , dividida por el exponente dinámico. Estos sistemas son descritos por la métrica de violación a la propiedad de hiperescalamiento, la cual podemos ver como una generalización de la métrica de Lifshitz debido a un nuevo parámetro llamado exponente de violación al hiperescalamiento. Cabe destacar que la métrica de violación al hiperescalamiento puede ser considerada como una generalización de la métrica de Lifshitz, ya que esta última se obtiene apagando el exponente dinámico.

Estudiamos una fórmula de Cardy anisotrópica, encontrada el 2011, que surge al considerar el crecimiento asintótico del número de estados de una teoría de campos con escalamiento Lifshitz. Esta fórmula nos entrega la entropía para espacio-tiempos Lifshitz

---

tridimensionales, dependiendo tanto del exponente dinámico presente en la métrica de Lifshitz como de la energía del estado fundamental. Un punto esencial al derivar esta fórmula es el asumir la existencia de una brecha en el espectro, lo cual nos asegura que la función de partición es dominada por la contribución del estado fundamental, el que se identifica con un solitón gravitacional. El solitón cumple lo que se espera para un estado fundamental: es suave y regular en todas partes, así como desprovisto de constantes de integración. Esto último es la razón por la cual tanto la masa de agujeros negros como la masa del solitón asociado se calculan mediante el formalismo cuasilocal y no usamos otros métodos como el formalismo hamiltoniano. El espectro de energía del sistema consiste en una parte continua limitada por la energía del sistema (masa de agujeros negros), una brecha y un estado fundamental con masa negativa fijada por el constantes fundamentales de la teoría, en este caso por un solitón.

En el capítulo 7, damos a conocer los resultados del artículo [1]. El objetivo fue exponer la forma de una fórmula de Cardy generalizada en el caso de espacio-tiempo con la métrica de violación a la propiedad de hiperescalamiento en tres dimensiones. Para lograr esta tarea, primero notamos que, en contraste con el caso Lifshitz, la dimensionalidad espacial efectiva definida por el escalamiento de la entropía en términos de la temperatura (6.1.4) no toma un valor fijo, que en caso de espacio-tiempos Lifshitz tiene el valor  $d_{\text{eff}} = 1$ , sino que depende claramente de la teoría de la gravedad considerada. Por ejemplo, en el caso estándar de gravedad de Einstein  $d_{\text{eff}} = 1 - \theta$  mientras que para correcciones cuadráticas tenemos  $d_{\text{eff}} = 1 + \theta$  y en el caso cúbico,  $d_{\text{eff}} = 1 + 3\theta$ . A partir de estas observaciones, hemos planteado la forma de la fórmula de Cardy anisotrópica generalizada, es decir que depende de la masa del agujero negro y de la masa del solitón gravitacional, pero ahora también en términos de la dimensionalidad espacial efectiva  $d_{\text{eff}}$ . Como en el caso de Lifshitz, el estado fundamental es proporcionado por el solitón que está separado del espectro de agujero negro por una brecha. Hemos comprobado la validez de esta fórmula en diferentes ejemplos en el caso de las teorías de gravedad cuadrática y cúbica, mientras que en el caso estándar de Einstein nuestra fórmula se reduce a la propuesta en [68]. En todos estos ejemplos existe una elección de las constantes de acoplamiento que aseguran que la masa del agujero negro (resp. la masa del solitón) sea positiva (o sea negativa) lo que garantiza la existencia de una brecha en el espectro.

La exploración de nuevas soluciones puede ser interesante para consolidar la validez de (7.0.8). Por ejemplo, en el caso cuadrático, existe la clase más general de soluciones dentro del ansatz (7.0.1) sin imponerle forma a la función métrica. De lo anterior nace la idea de explorar la versión cargada de las soluciones encontradas para proponer también

---

una versión cargada de la fórmula de Cardy. Algo muy interesante sería encontrar una forma general para la dimensionalidad efectiva espacial, no solo en 3 dimensiones, si no para dimensión arbitraria, dependiendo no solo de la dimensión espacial de la teoría, sino también del exponente de violación al hiperescalamiento  $\theta$ .

Teniendo esta última idea en consideración, en el capítulo 8, los resultados de [2] son expuestos. Nuestro punto de partida fue notar que en el caso de los agujeros negros tipo Lifshitz cuya única carga es la masa, la fórmula para el crecimiento asintótico del número de estados derivados en [23] implica naturalmente la aparición de una fórmula de Smarr dada por (8.0.1) en  $D = 3$ . En nuestra búsqueda de generalizar la fórmula de Cardy al caso de los agujeros negros tipo Lifshitz cargados eléctricamente, hemos propuesto una fórmula compatible con una versión cargada de la fórmula de Smarr de la forma (8.0.3). Para esto, por supuesto, esta fórmula nace con la idea de considerar como estado fundamental un solitón gravitacional, sin carga este soliton debería ser apropiado para dicha función. Pero, en este contexto existen soluciones donde el valor de su masa es nula pero su entropía no, esto claramente puede ser posible por la interacción de otros parámetros en la primera ley de la termodinámica, lo que nos lleva a que la masa del solitón también es cero, dejándonos sin opción de tener una brecha en el espectro de la energía y por lo tanto sin poder aproximar nuestra densidad de estados por el método de punto de silla. Lo que genera ahora la brecha en el espectro es el considerar el solitón gravitacional con carga, en nuestro caso una carga magnética, como estado fundamental. Siguiendo con la idea de considerar las distintas cargas noetherianas que aparecen en la primera ley de la termodinámica, sería interesante buscar nuevas representaciones del estado fundamental, que existen teóricamente, considerando el momento angular por ejemplo.

Hemos probado la viabilidad de esta fórmula en tres ejemplos diferentes donde se conocen agujeros negros tipo Lifshitz cargados que obedecen a una relación Smarr. Hemos extendido nuestro análisis otra clase de soluciones de agujero negro cargados con simetría anisotrópica, es decir, aquellas que presentan una violación al hiperescalamiento. Existe una generalización de la relación de Smarr en el caso de los agujeros negros AdS para los cuales la constante cosmológica se ve como variable dinámica. Esta generalización, estudiada en [89], puede ser entendida desde un punto de vista holográfico dual. La extensión al caso de Lifshitz puede también ser algo interesante a tratar, y seguir nuevamente el camino mostrado en el capítulo 8, para considerar agujeros negros cargados satisfaciendo además esta fórmula de Smarr generalizada. Como otra extensión de este trabajo, será interesante probar esta fórmula en muchos más ejemplos, y en particular en aquellos que involucran teorías de gravedad de orden superior en tres dimensiones. Esta tarea puede ser interesante

---

por sí misma en el caso de violación al hiperescalamiento, ya que como se muestra en [1], la dimensionalidad espacial efectiva  $d_{\text{eff}}$  puede variar en función del orden de las teorías gravitatorias involucradas en la acción. La extensión de esta fórmula de Cardy a dimensión arbitraria es natural después de estos resultados, al igual que una expresión análoga que nos entregue la entropía de agujeros negros con momento angular tipo Lifshitz y de violación al hiperescalamiento.

---

# Bibliografía

- [1] M. Bravo-Gaete, S. Gomez and M. Hassaine, Phys. Rev. D **91**, 124038 (2015) [arXiv:1505.00702 [hep-th]].
- [2] M. Bravo-Gaete, S. Gomez and M. Hassaine, Phys. Rev. D **92**, 124002 (2015) [arXiv:1510.04084 [hep-th]].
- [3] Jorge A. Rodríguez, *Introducción a la termodinámica*, Universidad tecnológica nacional, Argentina, 2004.
- [4] J. M. Bardeen, B. Carter and S. W. Hawking, *The Four laws of black hole mechanics*, Commun. Math. Phys. **31**, 161 (1973).
- [5] A. Einstein, *On the General Theory of Relativity*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915** (1915) 778-786.
- [6] A. Einstein, *The Field Equations of Gravitation*, Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Berlin (Math. Phys.) **1915** (1915) 844-847.
- [7] A. Einstein, *The Foundation of the General Theory of Relativity*, Annalen Phys. **49** (1916) 769-822.
- [8] S Hawking. and L Mlodinow, *A Briefer History of Time*, Bantam Books, 2005.
- [9] Sean M. Carroll, *Spacetime and Geometry, an introduction to General Relativity*, Addison Wesley, 2004.
- [10] J. D. Bekenstein, *Black holes and entropy* , Phys.Rev. D**7** 2333 (1973).
- [11] S. W. Hawking, *Particle Creation by Black holes*, Commun. Math. Phys. **43**, 199 (1975) [Erratum-ibid. **46**, 206 (1976)].
- [12] A. A. Belavin, A. M. Polyakov and A. B. Zamolodchicov, *Infinite conformal symmetry in two-dimensional quantum field theory*, Nucl. Phys. B *241* 333-380 (1984).
- [13] Paul H. Ginsparg, *Applied conformal field theory*, (1988) hep-th/9108028.

- [14] P. Di Francesco, P. Mathieu and D. Senechal. *Conformal field theory*, Springer (1997).
- [15] J. L. Cardy *Operator content of two-dimensional conformally invariant theories*, Nucl. Phys. B **270** 186-204 (1986).
- [16] H. W. J. Bloete, J. L. Cardy and M. P. Nightingale, *Conformal invariance, the central charge, and universal finite size amplitudes at criticality*, Phys. Rev. Lett. **56** 742-745 (1986).
- [17] A. Strominger, *Black hole entropy from near-horizon microstates*, JHEP **9802** (1998) 009. arXiv:hep-th/9712251.
- [18] J. Brown and M. Henneaux, *Central charges in the canonical realization of asymptotic symmetries: an example from three dimensional gravity*, Commun. Math. Phys. **104**, 207 (1986).
- [19] J. M. Maldacena, *The Large N limit of superconformal field theories and supergravity*, Adv. Theor. Math. Phys. **2**, 231 (1998) [hep-th/9711200].
- [20] F. Correa, C. Martinez, R. Troncoso, *Scalar solitons and the microscopic entropy of hairy black holes in three dimensions*, JHEP 1101 (2011) 034, arXiv:1010.1259 [hep-th]
- [21] F. Correa, C. Martinez, R. Troncoso, *Hairy black hole entropy and the role of solitons in three dimensions*, JHEP 1202 (2012) 136, arXiv:1112.6198 [hep-th]
- [22] S. Kachru, X. Liu and M. Mulligan, Phys. Rev. **D78** (2008) 106005, [arXiv:0808.1725].
- [23] H. A. Gonzalez, D. Tempo and R. Troncoso, *Field theories with anisotropic scaling in 2D, solitons and the microscopic entropy of asymptotically Lifshitz black holes*, JHEP **1111**, 066 (2011) [arXiv:1107.3647 [hep-th]].
- [24] M. Ammon, and J. Erdmenger. *Gauge/Gravity Duality, Foundations and Applications*, Cambridge University Press (2015).
- [25] E. A. Larrañaga, *Agujeros negros clásicos*, AshCat Publishers, 2011.
- [26] H. Reissner, *Über die eigengravitation des elektrischen feldes nach Einsteinschen theorie*, Ann. Phys. **59** (1916) 106-120.
- [27] G. Nordström, *On the energy of the gravitational field in Einstein's Theory*, Proc. Kon. Ned. Akad. Wet. **20** (1918) 1238-1245.
- [28] R. P. Kerr, *Gravitational field of a spinning mass as an example of algebraically special metrics*, Phys. Rev. Lett. **11**, 237 (1963) 237 - 238.

- 
- [29] M. Bañados, C. Teitelboim, and J. Zanelli, *The Black Hole in Three Dimensional Space Time*, Phys. Rev. Lett. **D69**, 1849 (1992) [hep-th/9204099].
- [30] Steve Sidhu, *Conformal field theory and black hole physics*, University of Lethbridge, Canada, 2015.
- [31] Sjoerd de Haan, *Thermodynamics of Born-Infeld black holes*, University of Groningen, 2009.
- [32] S Carroll, *Desde la eternidad hasta hoy*, Debate, 2015.
- [33] R. M. Wald, *Black hole entropy is the Noether charge*, Phys.Rev. **D48** (1993) no.8, R3427-R3431 [gr-qc/9307038].
- [34] V. Iyer and R. M. Wald, *Some properties of Noether charge and a proposal for dynamical black hole entropy*, Phys.Rev. **D50** (1994) 846-864 [gr-qc/9403028].
- [35] J. Lee and R. M. Wald, *Local symmetries and constraints*, J.Math.Phys. **31** (1990) 725-743
- [36] W. Kim, S. Kulkarni and S.-H. Yi, “Quasilocal Conserved Charges in a Covariant Theory of Gravity,” Phys. Rev. Lett. **111**, no. 8, 081101 (2013) [arXiv:1306.2138 [hep-th]].
- [37] Y. Gim, W. Kim and S. H. Yi, “The first law of thermodynamics in Lifshitz black holes revisited,” JHEP **1407**, 002 (2014) [arXiv:1403.4704 [hep-th]].
- [38] S. Nam, J. D. Park and S. H. Yi, *Mass and Angular momentum of Black Holes in New Massive Gravity*, Phys.Rev. **D 82** (2010) 124049 [arXiv:1009.1962[hep-th]].
- [39] A. Bouchareb, and G. Clément, *Black hole mass and angular momentum in topologically massive gravity*, Class.Quant.Grav. **24** (2007) 5581-5594 [arXiv:0706.0263 [gr-qc]].
- [40] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Topologically Massive Gauge Theories*, Annals Phys. **140** (1982) 372-411, Annals Phys. **281** (2000) 409-449, Erratum: Annals Phys. **185** (1988) 406.
- [41] S. Deser, R. Jackiw and S. Templeton, *Three-Dimensional Massive Gauge Theories*, Phys.Rev.Lett. **48** (1982) 975-978
- [42] W. Li, W. Song and A. Strominger, *Chiral Gravity in Three Dimensions*, JHEP **0804** (2008) 082 [arXiv:0801.4566]
-

- [43] S. Deser, and B. Tekin, *Energy in topologically massive gravity*, Class.Quant.Grav. **20** (2003) L259 [gr-qc/0307073].
- [44] S. Ölmez, Ö. Sarioğlu and B. Tekin, *Mass and angular momentum of asymptotically ads or flat solutions in the topologically massive gravity*, Class.Quant.Grav. **22** (2005) 4355-4362 [gr-qc/0507003].
- [45] E. A. Bergshoeff, O. Hohm and P. K. Townsend, *Massive Gravity in Three Dimensions*, Phys.Rev.Lett. **102** (2009) 201301 [arXiv:0901.1766].
- [46] Y. Liu and Y. W. Sun, *Note on New Massive Gravity in AdS(3)*, JHEP **0904** (2009) 106 [arXiv:0903.0536].
- [47] Nils Strodtthoff, *Conformal field theory: Foundations, extensions and boundaries*, Imperial College London, London, 2009.
- [48] J. Cardy, *Conformal invariance and statistical mechanics*, In E. Brézin and J. Zinn-Justin, editors, Les Houches, Session XLIX, 1988, Strings and critical phenomena. Elsevier Science Publishers B.V., 1989
- [49] S. Carlip. *What We Don't Know about BTZ Black Hole Entropy*, Class. Quant. Grav. 15:3609-3625,1998. hep-th/9806026.
- [50] S. Carlip. *Logaritmik corrections to black hole entropy from the Cardy formula*, Class. Quant. Grav. 17:4175-4186,2000. gr-qc/0005017
- [51] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet and M. Hassaine, *Lifshitz Black Hole in Three Dimensions*, Phys. Rev. D **80**, 104029 (2009) [arXiv:0909.1347 [hep-th]].
- [52] E. Ayon-Beato, A. Garbarz, G. Giribet and M. Hassaine, *Analytic Lifshitz black holes in higher dimensions*, JHEP **1004**, 030 (2010) [arXiv:1001.2361 [hep-th]].
- [53] H. Lu, Y. Pang, C. N. Pope and J. F. Vazquez-Poritz, *AdS and Lifshitz Black Holes in Conformal and Einstein-Weyl Gravities*, Phys. Rev. D **86**, 044011 (2012) [arXiv:1204.1062 [hep-th]].
- [54] Z. Y. Fan and H. Lu, *Thermodynamical First Laws of Black Holes in Quadratically-Extended Gravities* arXiv:1501.00006 [hep-th].
- [55] A. Giacomini, G. Giribet, M. Leston, J. Oliva and S. Ray, *Scalar field perturbations in asymptotically Lifshitz black holes*, Phys. Rev. D **85**, 124001 (2012) [arXiv:1203.0582 [hep-th]].
- [56] J. Oliva and S. Ray, *Birkhoff's Theorem in Higher Derivative Theories of Gravity II*, Phys. Rev. D **86**, 084014 (2012) [arXiv:1201.5601 [gr-qc]].

- 
- [57] M. T̃aylor, *Non-relativistic holography*, [arXiv:0812.0530].
- [58] U. Danielsson and L. Thorlacius, JHEP **0903** (2009) 070, [arXiv:0812.5088].
- [59] D. W. Pang, *On Charged Lifshitz Black Holes*, JHEP **1001**, 116 (2010) [arXiv:0911.2777 [hep-th]].
- [60] A. Alvarez, E. Ayón-Beato, H. A. González and M. Hassaine, *Nonlinearly charged Lifshitz black holes for any exponent  $z > 1$* , JHEP **1406**, 041 (2014) [arXiv:1403.5985 [gr-qc]].
- [61] B. Gouteraux and E. Kiritsis, *Generalized Holographic Quantum Criticality at Finite Density* JHEP **1112**, 036 (2011) [arXiv:1107.2116 [hep-th]].
- [62] S. Sachdev, *The Quantum phases of matter*, arXiv:1203.4565 [hep-th].
- [63] C. Charmousis, B. Gouteraux and E. Kiritsis, *Higher-derivative scalar-vector-tensor theories: black holes, Galileons, singularity cloaking and holography*, JHEP **1209**, 011 (2012) [arXiv:1206.1499 [hep-th]].
- [64] X. Dong, S. Harrison, S. Kachru, G. Torroba and H. Wang, *Aspects of holography for theories with hyperscaling violation*, JHEP **1206**, 041 (2012) [arXiv:1201.1905 [hep-th]].
- [65] M. Alishahiha, E. O Colgain and H. Yavartanoo, *Charged Black Branes with Hyperscaling Violating Factor*, JHEP **1211**, 137 (2012) [arXiv:1209.3946 [hep-th]].
- [66] M. Cadoni and M. Serra, JHEP **1211**, 136 (2012) [arXiv:1209.4484 [hep-th]];
- [67] P. Bueno, W. Chemissany, P. Meessen, T. Ortin and C. S. Shahbazi, *Lifshitz-like Solutions with Hyperscaling Violation in Ungauged Supergravity*, JHEP **1301**, 189 (2013) [arXiv:1209.4047 [hep-th]].
- [68] E. Shaghoulian, *A Cardy formula for holographic hyperscaling-violating theories*, arXiv:1504.02094 [hep-th].
- [69] M. Hassaine, *New black holes of vacuum Einstein equations with hyperscaling violation and Nil geometry horizons*, Phys. Rev. D **91**, no. 8, 084054 (2015) [arXiv:1503.01716 [hep-th]].
- [70] S Hawking. and R Penrose, *The Nature of Space and Time*, Princeton University Press, 1996.
- [71] A. j. Mountain, *Wick rotation and supersymmetry*, PoS tmr99 (1999) 036, Prepared for TMR Meeting on Quantum Aspects of Conference: C99-09-01.2, Conference: C99-09-01.2 Proceedings.

- [72] J. Oliva, D. Tempo, R. Troncoso, *Three-dimensional black holes, gravitational solitons, kinks and wormholes for BHT massive gravity*, JHEP 0907 (2009) 011, arXiv:0905.1545 [hep-th]
- [73] M. I. Park, *Fate of three-dimensional black holes coupled to a scalar field and the Bekenstein-Hawking entropy*, Phys.Lett. B **597** (2004) 237-242, arXiv:0403089 [hep-th]
- [74] A. V. Chubukov, S. Sachdev, T. Senthil, *Quantum phase transitions in frustrated quantum antiferromagnets*, Nucl. Phys. **B426**, 601-643 (1994).
- [75] K. Yang, Phys. Rev. Lett. 93 (2004) 066401.
- [76] J. L. Cardy, *Critical exponents of the chiral Potts model from conformal field theory*, Nucl. Phys. B **389**, 577 (1993) [arXiv:hep-th/9210002].
- [77] D. M. Hofman and A. Strominger, *Chiral Scale and Conformal Invariance in 2D Quantum Field Theory*, Phys.Rev.Lett. **107** (2011) 161601 arXiv:1107.2917 [hep-th].
- [78] S. A. Hartnoll, *Lectures on holographic methods for condensed matter physics*, Class. Quant. Grav. **26**, 224002 (2009) [arXiv:0903.3246 [hep-th]].
- [79] A. Adams, A. Maloney, A. Sinha, S. E. Vazquez, *1/N Effects in Non-Relativistic Gauge-Gravity Duality*, JHEP **0903**, 097 (2009). [arXiv:0812.0166 [hep-th]].
- [80] H. S. Liu and H. Lu, *Thermodynamics of Lifshitz Black Holes*, JHEP **1412**, 071 (2014) [arXiv:1410.6181 [hep-th]].
- [81] D. O. Devecioglu and O. Sarioglu, *On the thermodynamics of Lifshitz black holes*, Phys. Rev. D **83**, 124041 (2011) [arXiv:1103.1993 [hep-th]].
- [82] M. Bravo-Gaete and M. Hassaine, *Thermodynamics of charged Lifshitz black holes with quadratic corrections*, Phys. Rev. D **91**, no. 6, 064038 (2015) [arXiv:1501.03348 [hep-th]].
- [83] L. Smarr, *Mass formula for Kerr black holes*, L. Smarr, Phys. Rev. Lett. **30**, 71 (1973) [Erratum: Phys. Rev. Lett. **30**, 521 (1973)].
- [84] W. G. Brenna, R. B. Mann and M. Park, *Mass and Thermodynamic Volume in Lifshitz Spacetimes*, Phys. Rev. D **92**, no. 4, 044015 (2015) [arXiv:1505.06331 [hep-th]].
- [85] M. K. Zangeneh, A. Sheykhi and M. H. Dehghani, Phys. Rev. D **92**, no. 2, 024050 (2015) [arXiv:1506.01784 [gr-qc]].

- [86] M. H. Dehghani, C. Shakuri and M. H. Vahidinia, Phys. Rev. D **87**, no. 8, 084013 (2013) [arXiv:1306.4501 [hep-th]].
- [87] J. Tarrio and S. Vandoren, JHEP **1109**, 017 (2011) [arXiv:1105.6335 [hep-th]].
- [88] M. H. Dehghani, A. Sheykhi and S. E. Sadati, Phys. Rev. D **91**, no. 12, 124073 (2015) [arXiv:1505.01134 [hep-th]].
- [89] A. Karch, and B. Robinson, *Holographic Black Hole Chemistry*, JHEP 1512 (2015) 073 [arXiv:1510.02472 [hep-th]].