Combinatoria de los Superpolinomios de Macdonald y de sus Multi-extensiones

Camilo González Palma

Tesis de Doctorado presentada en cumplimiento parcial
de los requisitos para el grado de Doctor en Matemáticas.

Instituto de Matemáticas y Física
Universidad de Talca

Enero 2019

Contents

Agradecimientos

Quiero comenzar agradeciendo a mi tutor, el profesor Luc Lapointe, por su apoyo y paciencia en estos años de trabajo. Sus consejos y ayuda fueron fundamentales para la obtención de los resultados y logros de esta tesis. También quiero agradecer a los profesores del IMAFI, que fueron fundamentales en mi formación. Una mención especial a mi director de tesis de Magíster, Henri Comman, que me aconsejo y me incentivo a continuar estudios de doctorado.

También quiero agradecer a mis padres, Carlos y Fabiola, y a mi hermano, Daniel. Ellos, desde pequeño, me enseñaron lo importante que es el esfuerzo para alcanzar tus metas, a no rendirme cuando el camino se ve difícil. Sus consejos y motivación desde toda mi educación formal fueron muy importantes, especialmente cuando hubieron dificultades. Mis estudios fueron menos cuesta arriba gracias al respaldo obtenido por ellos, tanto económico como afectivamente. También quiero agradecerles su comprensión y apoyo para estudiar esta carrera, ya que en un comienzo, incluso para mi, fue un poco difícil entender a lo que me iba a dedicar.

Sin duda también agradecer a Elizabeth, por su amor y cariño incondicional, por acompañarme a esta aventura en Talca. Escogimos la misma carrera y nos hemos apoyado en conjunto desde que iniciamos nuestra vida en Talca. Cada conversación de matemáticas y también no de matemáticas me ayudaron a encontrar un buen equilibrio entre la matemática y la vida familiar. También le quiero agradecer la paciencia, sobre todo en los momentos finales, su compañia y apoyo fue un cable a tierra cuando fue necesario. Junto a nuestro (ya no tan) pequeño Christopher le siguen dando sentido a todo esto, cada esfuerzo es más fácil por ustedes.

Agradezco también a mis compañeros del IMAFI y amigos, en especial a Sebastian, Gabriela, Lilian, David y Jorge, que desde que llegamos Talca, nos ayudaron a sentirnos mas acompañados. Sin duda han contribuido a que esta estadía en Talca sea mucho más amena y agradable, también quiero agradecerles por tantas conversaciones y consejos.

Finalmente, debo agradecer a la Universidad de Talca y a la Comisión Nacional de Ciencia y Tecnología CONICYT por el financiamiento económico brindado durante mis estudios de doctorado.

Introducción

El estudio de las funciones simétricas es un tema central dentro de la combinatoria algebraica. Una función en varias variables se dice simétrica si es invariante bajo cualquier intercambio de sus variables. Unas de las funciones simétricas más importantes son las llamadas funciones de Schur, las cuales poseen diversas propiedades combinatoriales además de tener conexiones con la teoría de representaciones. Una notable generalización de las funciones de Schur son los polinomios de Macdonald, los cuales fueron introducidos por Macdonald en 1987 [**11**]. Estos polinomios dependen de dos parámetros q y t que al especializarse dan las funciones de Schur, así como otras funciones simples como las funciones monomiales y elementales o polinomios más importantes como los polinomios de Hall-Littlewood y de Jack.

Las funciones simétricas también tienen conexiones con la física. Un ejemplo de esto es que los polinomios de Jack son funciones propias del modelo cuántico de Calogero-Moser-Sutherland trigonométrico (tCMS), el cual describe la interacción de N partículas idénticas sobre un círculo. Siguiendo esta conección, la versión supersimétrica de este módelo fue utilizada por Lapointe, Desrosiers y Mathieu para obtener una versión supersimétrica de los polinomios de Jack [**12, 13, 14**]. Esto dio comienzo a una extensión supersimétrica de la teoría de funciones simétricas. En esta extensión las funciones dependen de dos tipos de variables; las variables usuales x_i y las variables θ_i que anticonmutan entre ellas y son llamadas variables fermiónicas. Al espacio de las variables x_i junto con las variables θ_i se le llama superespacio mientras que un polinomio $f(x_1, \dots, x_N; \theta_1, \dots, \theta_N)$ invariante bajo el intercambio simultáneo de las variables x_i y θ_i se dice superpolinomio simétrico. En [**15, 16**] Lapointe, Desrosiers y Mathieu mostraron que ciertas propiedades de los polinomios de Jack como la dualidad, la evaluación y la norma se pueden extender a los superpolinomios de Jack. Además Gatica, Jones y Lapointe [**10**] describieron en 2017 una regla de Pieri para los superpolinomios de Jack.

El siguiente paso en el estudio de una teoría de funciones simétricas en el superespacio fue, naturalmente, encontrar una versión supersimétrica de los polinomios de Macdonald, lo cual fue realizado el año 2013 por Blondeau-Fournier, Lapointe, Desrosiers y Mathieu [**8**]. En tal artículo sólo se mostraron ciertas propiedades como la dualidad, dejando la evaluación, la norma y reglas de Pieri como problemas abiertos.

Por otro lado, en [**22**] se mostró que los superpolinomios de Macdonald poseen una cierta estabilidad con respecto a su parte fermiónica. Utilizando esta propiedad y reescribiendo las variables se obtuvo que una familia de superpolinomios de Macdonald se podía factorizar en el producto de dos polinomios de Macdonald. Tales polinomios son indexados por biparticiones y son llamados dobles polinomios de Macdonald. Estos dobles polinomios de Macdonald no involucran más variables fermiónicas sino que un segundo alfabeto de variables bósonicas, por lo que se dicen bisimétricos al ser polinomios simétricos en dos tipos de variables. También se probaron algunas propiedades como la norma y la evaluación, las cuales pudieron ser demostradas a partir de su descomposición en factores de dos polinomios de Macdonald. Uno de los problemas que fue abordado en esta tesis corresponde a generalizar los dobles-polinomios de Macdonald a un número arbitrario de conjuntos de variables (alfabetos).

Como mencionamos anteriormente, algunas propiedades combinatoriales sobre los superpolinomios de Macdonald aún no habían sido probadas, en particular la norma, la evaluación, las reglas de Pieri y la propiedad de simetría. Estos problemas abiertos también fueron abordados en esta tesis. En el caso de los polinomios de Macdonald, estas propiedades son probadas simúltaneamente utilizando operadores. Sin embargo no teníamos la versión supersimétrica de estos operadores y tampoco teníamos una idea de cómo encontrarlos. Es por esto que primero nos pareció más razonable encontrar la norma y la evaluación de manera directa, lo cual resultó ser exitoso.

Las fórmulas de la norma y la evaluación fueron conjeturadas en [**8**]. Uno de los principales resultados de esta tesis es la demostración de estas fórmulas. En nuestro caso la definición de la evaluación es un poco más general que la dada en [**8**], ya que incluimos un parámetro u, lo que implicó que el resultado que obtuvimos sea también un poco más general que el que fue conjeturado en [**8**]. Más específicamente, el resultado lo conseguimos combinando las ideas de Macdonald en [**11**] con la demostración de la evaluación en el caso de los superpolinomios de Jack [**16**]. En particular, siguiendo la idea de Macdonald, incluimos el parámetro u mencionado anteriomente, lo que implicó que la evaluación sea un polinomio sobre u de grado conocido. Los factores de este polinomio se obtienen por recursividad sobre las columnas del diagrama de la superpartición que indexa el polinomio, los que resultan ser fórmulas tipo largo-pierna y largo-brazo. En el caso de las columnas fermiónicas, imitando la idea de la demostración de la evaluación de los superpolinomios de Jack, hubo que incluir una segunda evaluación, que también tiene una fórmula explícita. La fórmula de evaluación que obtuvimos generaliza la evaluación de un polinomio de Macdonald, haciendo el grado fermiónico nulo, y generaliza la evaluación de los superpolinomios de Jack mediante el límite adecuado. La fórmula de la norma de un superpolinomio de Macdonald se obtiene como consecuencia de la evaluación y de la dualidad. Esta fórmula también generaliza las fórmulas de la norma para los polinomios de Macdonald y de los superpolinomios de Jack.

Como fue dicho previamente, en el caso usual de Macdonald las reglas de Pieri[1] y la propiedad de simetría[2] son probadas simúltaneamente utilizando ciertos operadores D_r^N. Por lo tanto, de manera natural intentamos obtener una versión de estos operadores en el superespacio. Esto fue parcialmente resuelto, puesto que logramos encontrar la extensión de los operadores D_r^N, pero sólo de forma conjetural. Al igual que en el caso de la evaluación donde necesitamos una segunda evaluación, en este caso obtuvimos dos tipos de operadores.

[1]Con las reglas de Pieri nos referimos al producto de una función elemental por un superpolinomio de Macdonald. Este producto resulta en una suma de superpolinomios de Macdonald, indexados por superparticiones que dependen de la superpartición original, cada uno multiplicado cierta función racional en q y t.

[2]Esta simetría es con respecto a una nueva evaluación sobre los superpolinomios de Macdonald. Esta evaluación es más general que la que mencionamos anteriormente, ya que depende de una superpartición. La propiedad de simetría se refiere a que al realizar esta evaluación sobre un superpolinomio de Macdonald, las superparticiones involucradas de la evaluación y del superpolinomio de Macdonald pueden ser intercambiadas sin alterar el resultado.

La expresión de estos operadores tiene una forma muy elegante, con una estructura similar a los operadores de Macdonald, aunque de complejidad bastante mayor. Esta complejidad adicional fue tal que no pudimos probar que los operadores tienen como funciones propias a los superpolinomios de Macdonald. Más específicamente, en el caso usual de Macdonald el resultado es un corolario de que la acción de estos operadores sobre el Kernel es simétrica con respecto a intercambiar las variables x e y. Esto se puede hacer, ya que directo de la definición del Kernel, basta probar el resultado cuando $q = t$, es decir sobre las funciones de Schur. En nuestro caso, no hemos podido obtener tal expresión independiente de q, por lo que probar que la acción de estos operadores sobre el Kernel en el superespacio es simétrica aún es un problema abierto. Este es el problema abierto más interesante que queda de esta tesis, puesto que implicaría que los superpolinomios de Macdonald son funciones propias de estos operadores y posiblemente abriría la puerta a una demostración de las reglas de Pieri y de la simetría en el caso supersimétrico.

En otro eje, como señalamos previamente, los dobles polinomios de Macdonald se obtienen a partir de una subfamilia de superpolinomios de Macdonald. Estos polinomios no incluyen más variables fermiónicas sino que otro conjunto de variables que conmutan entre ellas, por lo que este eje de la tesis es complemente distinto a lo mencionado en los párrafos anteriores. Los dobles polinomios de Macdonald también se pueden definir a partir de la triangularidad y la ortogonalidad al igual que los polinomios de Macdonald usuales. Tales definiciones de triangularidad y ortogonalidad se pueden extender de manera natural a finitos conjuntos de variables independientes. Es así que definimos los multi-polinomios de Macdonald como los únicos polinomios mónicos que satisfacen esta triangularidad y ortogonalidad. La manera usual de probar la existencia de tales polinomios es utilizando operadores. Sin embargo lo pudimos probar en nuestro caso de manera directa, es decir construimos los polinomios explícitamente y probamos que efectivamente satisfacen la triangularidad y la ortogonalidad. La construcción de estos polinomios se hace a partir de productos de polinomios de Macdonald usuales, pero dependiendo de combinaciones no triviales de operaciones entre los conjuntos de variables. Luego de probar la existencia de estos multi-polinomios de Macdonald también pudimos probar que satisfacen diversas propiedades como la norma y la evaluación. Otra propiedad interesante que pudimos obtener fue una cierta invariancia con respecto a la inversión de los parámetros q y t, es decir enviando q, t a q^{-1}, t^{-1} el polinomio se mantiene invariante módulo potencias de q. Para finalizar, tomando los límites usuales se pudo definir versiones múltiples de los polinomios de Jack, Hall-Littlewood y de las funciones de Schur. Utilizando estas funciones de Schur obtuvimos una versión múltiple de los polinomios de q, t-Kostka (que siguen siendo positivos). Estos polinomios de multi-Kostka se especializan en el caso $q = t = 1$ a las dimensiones de las representaciones irreducibles de los grupos simétricos generalizados (el producto en corona entre un grupo cíclico y un grupo simétrico), por lo que los multi-polinomios de Macdonald se pueden considerar como otra familia de polinomios de Macdonald en corona [**25**].

Organización de la tesis

En el Capítulo 1 se muestran algunos resultados conocidos de la teoría de funciones simétricas. Nuestro enfoque es principalmente los polinomios de Macdonald, por lo que no se darán mayores detalles de las otras familias de funciones simétricas. También queremos destacar en este capítulo las fórmulas de la norma y la evaluación además de las reglas de

Pieri para los polinomios de Macdonad, los cuales son temas centrales en este tesis, debido a que queremos encontrar la extensión de estas fórmulas al superespacio. Estos resultados pueden ser encontrados en [**1**].

En el Capítulo 2 presentamos algunas nociones básicas de la teoría de funciones simétricas en el superespacio. Principalmente, se muestran las versiones supersimétricas de las bases presentadas en el Capítulo 1. Tambien se muestra con detalle la combinatoria de las superparticiones, los cuales son los principales objetos combinatoriales que utilizaremos.

Los resultados de esta tesis son presentados en los Capítulo 3, 4 y 5. En el Capítulo 3 mostramos fórmulas combinatoriales para la evaluación y norma de los superpolinomios de Macdonald. Para ello se requirió definir los superpolinomios Skew-Macdonald, además de definir operaciones en las superparticiones. Para la demostración de la fórmula de la evaluación se necesito definir una nueva evaluación, la cuál también tiene una fórmula explícita sobre los polinomios de Macdonald en el superespacio. La fórmula para la norma es una consecuencia de una relación entre la dualidad y la fórmula de evaluación. En el capítulo 4 mostramos diversas conjeturas sobre los operadores D_r^N en el superespacio.

En el Capítulo 5 mostramos la existencia de polinomios Macdonald multisimétricos, estos polinomios son indexados por multiparticiones y están evaluados en finitos alfabetos independientes entre ellos. Algunas propiedades de los polinomios de Macdonald pudo ser extendida como la norma, la evaluación , aunque otras como la dualidad no.

En el Apéndice A mostramos la conexión entre los polinomios de Macdonald no-simétricos y simétricos. Para ello se define explícitamente un polinomio de Macdonald no-simétrico a través de operadores de Cherednik, los cuáles se definen a partir de operadores de Demazure-Lustig. Estos operadores satisfacen las relaciones de un álgebra de Hecke afín. Además se muestran las demostraciones de dos proposiciones del Capítulo 3, estos resultados se obtienen utilizando los polinomios de interpolación de Macdonald, los cuales están relacionados con los polinomios de Macdonald no-simétricos. En el Apéndice B se encuentran las fórmulas de especialización y la propiedad de simetría sobre los superpolinomios de Macdonald. En los otros apéndices hay diversos ejemplos de superpolinomios de Macdonald, además de ejemplos de las fórmulas de la evaluación y la norma para los superpolinomios de Macdonald.

CHAPTER 1

Funciones Simétricas

Las funciones simétricas son polinomios en varias variables que son invariantes bajo la acción del grupo simétrico, el cuál actúa permutando las variables, estas funciones tienen diversas aplicaciones a distintas áreas de la matemática, como teoría de representaciones y geometría algebraía y también tienen aplicaciones en física. En las primeras secciones de este capítulo se introducirán algunas definiciones básicas y se darán algunas bases para el algebra de funciones simétricas, luego introduciremos los polinomios de Macdonald, los cuáles son una clase de funciones simétricas con dos parámetros, en el sentido que podemos recuperar las funciones de Schur, los polinomios de Jack y de Hall-Littlewood a partir de especializar los parámetros. En este capítulo no son incluídas las demostraciones, éstas pueden ser encontradas en [**1**]. Los objetos combinatoriales que utilizaremos, para indexar las bases del algebra de funciones simétricas son las llamadas particiones.

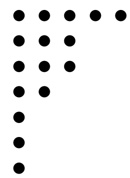
1. Particiones

Una partición es una sucesión decreciente de números naturales $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$, los números λ_i son llamados las partes o los componentes de λ. El largo $l(\lambda)$ de λ es el número de componentes distintos de cero de λ, además el tamaño de λ, denotado por $|\lambda|$, es la suma de todos los componentes. En el caso que $|\lambda| = n$, diremos que λ es una partición de n y lo denotaremos por $\lambda \vdash n$. Si dos particiones difieren sólo de una cadena de ceros, entonces estas representan la misma partición.

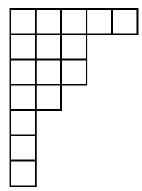
Ejemplo 1. *Sean* $\mu = (4,2,1,1,0,0,0,0)$ *y* $\lambda = (4,2,1,1,0,0)$ *particiones. Como ellas difieren sólo de una cadena de ceros en el final, diremos que* λ *y* μ *son la misma partición. También tenemos* $|\lambda| = 8$ *y* $l(\lambda) = 4$.

A cada partición le podemos asociar un diagrama, consistente de un conjunto de puntos $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$ tal que $1 \leq j \leq \lambda_i$. Para dibujar el diagrama adoptaremos la notación matricial, es decir la primera coordenada i incrementa hacia abajo, y la segunda coordenada incrementa de izquierda a derecha.

Ejemplo 2. *El diagrama de la partición* $(5,3,3,2,1,1,1)$ *es*



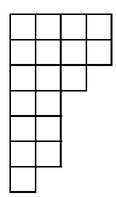
A menudo se suelen reemplazar los puntos por cajas, o sea de esta forma el diagrama de $(5,3,3,2,1,1,1)$ es



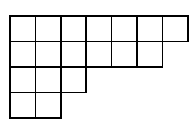
También las particiones se pueden escribir de forma $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2}, 3^{m_3})$, donde m_i es el número de i que aparecen en la partición lambda. Por ejemplo la partición $\lambda = (4,4,3,1,1,1)$ se puede escribir $\lambda = (1^3, 2^0, 3^1, 4^2)$.

El conjugado de una partición λ es la partición, denotada por λ', cuyo diagrama es obtenido por la transpuesta (en el sentido matricial) del diagrama λ, i.e. el diagrama de λ' es obtenido por la reflexión con respecto a la diagonal principal. De esta manera, se puede ver que cada λ'_i es el número de puntos en la i-ésima columna de λ; en particular, $\lambda'_1 = l(\lambda)$. Además es claro que $(\lambda')' = \lambda$.

Ejemplo 3. *El diagrama de la partición* $\lambda = (4,4,3,2,2,2,1)$ *es*



y por lo tanto el diagrama de λ' *es*



y así $\lambda' = (7,6,3,2)$.

Para cada partición definimos $n(\lambda)$ por

$$n(\lambda) = \sum_{i \geq 1} (i-1)\lambda_i,$$

observamos que $n(\lambda)$ es obtenido por sumar todos los números que obtenemos de agregar un cero en cada caja de la primera fila, un uno en cada caja de la segunda fila, un dos en cada caja de la tercera fila y así sucesivamente. Este número combinatorial será utilizado en la Sección 4.

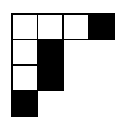
Ejemplo 4. *Sea $\lambda = (5,3,2,2,1,1,1)$. Agregaremos un 0 en todas las cajas de la primera fila, un 1 en todas las cajas de la segunda fila y así sucesivamente, entonces nos queda el diagrama*

$$\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-3} 2 & 2 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 3 & 3 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-2} 4 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} 5 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} 6 & \multicolumn{4}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} ,$$

luego sumando todos los números obtenemos $n(\lambda) = 28$.

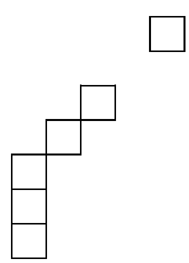
Dados λ y μ particiones. Si el diagrama de la partición μ contiene el diagrama de λ, i.e. $\mu_i \geq \lambda_i$ para todo i, escribimos $\lambda \subset \mu$. Cuando $\lambda \subset \mu$, podemos definir el skew-diagrama $\mu - \lambda$; el cuál es obtenido por poner el diagrama μ en λ, y así el skew-diagram consiste de las cajas que nos sobran.

Ejemplo 5. *Consideramos las particiones $\lambda = (4,2,2,1)$ y $\mu = (3,1,1)$, el skew-diagrama $\lambda - \mu$ es la región sombreada en*



Definición 1. *Sea θ un skew-diagrama. Decimos que θ es un horizontal m-strip (resp. vertical m-strip) si $|\theta| = m$ y $\theta_i' \leq 1$ para cada $i \geq 1$. En otras palabras, un horizontal (resp. vertical) m-strip tiene a lo más una caja en cada columna (resp. fila).*

Ejemplo 6. *Consideramos el skew-diagrama $(5,3,3,2,1,1,1) - (4,3,2,1)$ es un vertical 6-strip ya que el skew-diagram es dado por*



El conjunto de todas las particiones de n es denotado por P_n, en el conjunto P_n podemos introducir un orden parcial llamado el orden de dominancia denotado por $\geq$: sean μ, λ particiones en P_n, decimos que $\mu \geq \lambda$ si

$$\mu_1 + \ldots + \mu_i \geq \lambda_1 + \ldots + \lambda_i$$

para todo $i \geq 1$. No es difícil de ver que el orden de dominancia en P_5 es un orden total, pero si $n \geq 6$, observamos que $\geq$ no es un orden total. Por ejemplo $(3,1,1,1)$ y $(2,2,2)$ son particiones de 6, pero ellas no son comparables con respecto a $\geq$.

El diagrama de Hesse de las particiones de tamaño 6 es el siguiente:

$$
\begin{tikzcd}[column sep=small]
 & (6) \arrow[d, dash] & \\
 & (5,\ 1) \arrow[d, dash] & \\
 & (4,\ 2) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(4,\ 1^2) \arrow[dr, dash] & & (3,\ 3) \arrow[dl, dash] \\
 & (3,\ 2,\ 1) \arrow[dl, dash] \arrow[dr, dash] & \\
(2^3) \arrow[dr, dash] & & (3,\ 1^3) \arrow[dl, dash] \\
 & (2^2,\ 1^2) \arrow[d, dash] & \\
 & (2,\ 1^4) \arrow[d, dash] & \\
 & (1^6) &
\end{tikzcd}
$$

Además tenemos el siguiente resultado que relaciona el orden y la conjugación de particiones:

PROPOSICIÓN 1. *Sean* $\lambda, \mu \in P_n$. *Entonces*

$$\lambda \geq \mu \Leftrightarrow \mu' \geq \lambda'.$$

2. El Algebra de las Funciones Simétricas

Sean $x_1, \ldots, x_n$ variables independientes. Consideramos $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ el anillo de polinomios en n variables con coeficientes enteros. El grupo simétrico S_n actúa en $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$ por permutar las variables; un polinomio se dice simétrico si este es invariante bajo esta acción. Es claro que los polinomios simétricos forman un subanillo, el cuál denotaremos por

$$\Lambda_n = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]^{S_n}.$$

Dado un $f \in \Lambda_n$, podemos escribir

$$f = \sum_{k \geq 0} f_k,$$

donde f_k es la componente homogénea de f de grado k. De esta manera podemos ver que Λ_n es graduado, y tenemos

$$\Lambda_n = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda_n^k$$

donde Λ_n^k es el grupo (aditivo) de los polinomios simétricos homogéneos de grado k, junto con el polinomio nulo en $x_1, \ldots, x_n$.

Supongamos que agregamos una variable x_{n+1}, así podemos definir $\Lambda_{n+1} = \mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_{n+1}]^{S_{n+1}}$, y luego podemos considerar el homomorfismo sobreyectivo

$$\Lambda_{n+1} \to \Lambda_n \tag{1}$$

por poner $x_{n+1} = 0$. Es claro que la aplicación $\Lambda_{n+1}^k \to \Lambda_n^k$ es sobreyectiva para todo $r \geq 0$. Además es biyectiva si y sólo si $r \leq n$. De esta forma podemos considerar el límite proyectivo sobre n y definimos para cada $k \geq 0$

$$\Lambda^k = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ n}} \Lambda_n^k$$

y luego definimos

$$\Lambda = \bigoplus_{k \geq 0} \Lambda^k.$$

Podemos observar que $f \in \Lambda$ no es un polinomio, pero que al fijar el número de variables, gracias a la graduación obtenemos un polinomio; la condición dada en el límite proyectivo de que haciendo $x_{n+1} = 0$ nos dice realmente que la graduación funciona y de esta manera trabajaremos con un número arbitrariamente grande de variables, según sea necesario. Los elementos de Λ son los que llamamos funciones simétricas. Si R es cualquier anillo conmutativo, escribimos

$$\Lambda_R = \Lambda \otimes_{\mathbb{Z}} R, \quad \Lambda_{n,R} = \Lambda_n \otimes_{\mathbb{Z}} R \tag{2}$$

los cuales representan el anillo de funciones simétricas y el anillo de polinomios simétricos con coeficientes en R, respectivamente.

2.1. Monomiales simétricos. Para cada $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in \mathbb{N}^n$ definimos el monomial x^α por

$$x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}.$$

Definición 2. *Sea λ una partición tal que $l(\lambda) \leq n$. Definimos el monomial simétrico*

$$m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = \sum_\alpha x^\alpha$$

donde la suma es sobre todas las permutaciones distintas α de $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$.

Example 1. *Si $\lambda = (2, 2, 1)$, entonces el monomial m_λ en Λ_3 es dado por*

$$m_\lambda(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 x_2^2 x_3 + x_3^2 x_2^2 x_1 + x_1^2 x_3^2 x_2.$$

Notemos en general que si $n < l(\lambda)$, entonces $m_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = 0$.

Observación 1. *No es difícil de verificar que el conjunto $\{m_\lambda\}_\lambda$ forma una $\mathbb{Z}$-base de Λ_n donde $l(\lambda) \leq n$.*

2.2. Funciones Simétricas Elementales. Sea r un entero no-negativo. La función simétrica elemental e_r es la suma de todos los productos de r distintas variables x_i; también definimos $e_0 = 1$. Cuando $r \geq 1$, tenemos

$$e_r = \sum_{i_1 < i_2 < \cdots < i_r} x_{i_1} x_{i_2} \cdots x_{i_r} = m_{(1^r)},$$

por ejemplo si $r = 2$, entonces

$$e_2(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_2x_3, \text{ y}$$
$$e_2(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2 + x_1x_3 + x_1x_4 + x_2x_3 + x_2x_4 + x_3x_4.$$

Se puede ver que en general $e_r(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ corresponde a la suma de todos los posibles productos de r variables x_i distintas.

Definición 3. *Para cada partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$, definimos*

$$e_\lambda = e_{\lambda_1} e_{\lambda_2} e_{\lambda_3} \cdots$$

También se tiene la siguiente relación entre las funciones monomiales simétricas y las funciones simétricas elementales:

Proposición 2. *Sean λ una partición and λ' su conjugado. Entonces*

$$e_{\lambda'} = m_\lambda + \sum_\mu a_{\lambda\mu} m_\mu,$$

donde $a_{\lambda\mu}$ son enteros no-negativos, y la suma es sobre las particiones $\mu < \lambda$ en el orden de dominancia .

Esta proposición implica que el conjunto de funciones elementales $\{e_\lambda\}_\lambda$ también es una $\mathbb{Z}$-base de Λ_n donde $l(\lambda) \leq n$. Además el conjunto $\{e_r\}_r$ es algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}$ y así

$$\Lambda = \mathbb{Z}[e_1, e_2, \ldots]. \tag{3}$$

2.3. Funciones Simétricas Completas. Sea r un entero no-negativo. La r-ésima función simétrica completa h_r es la suma de todos los monomiales simétricos de grado total r en las variables $x_1, x_2, \ldots, \ldots$, por lo tanto

$$h_r = \sum_{\lambda \vdash r} m_\lambda.$$

También tenemos que $h_0 = 1$ y notamos que $h_1 = e_1$.

Ejemplo 7. *Sea $r = 3$, así podemos ver que hay 3 particiones de 3, las cuáles son $(1^3), (2,1)$ y (3), entonces*

$$h_3 = m_{(1^3)} + m_{(2,1)} + m_{(3)}$$

y así en 3 variables tenemos que

$$h_3(x_1, x_2, x_3) = x_1x_2x_3 + x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3.$$

Definición 4. *Para cada partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$, definimos*

$$h_\lambda = h_{\lambda_1} h_{\lambda_2} h_{\lambda_3} \cdots$$

También se tiene que el conjunto $\{h_r\}_r$ es algebraicamente independiente sobre $\mathbb{Z}$ y luego tenemos

$$\Lambda = \mathbb{Z}[h_1, h_2, \ldots]. \tag{4}$$

2.4. Sumas de potencias. Sea r un entero no-negativo. La r-ésima suma de potencias es

$$p_r = \sum_i x_i^r = m_{(r)}.$$

así tenemos que si $r = 4$, entonces

$$p_4(x_1, x_2, x_3, \ldots) = x_1^3 + x_2^4 + x_3^4 + \ldots$$

en general tenemos la siguiente definición:

Definición 5. *Para cada particion $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots)$, definimos*

$$p_\lambda = p_{\lambda_1} p_{\lambda_1} p_{\lambda_2} p_{\lambda_3} \cdots$$

Proposición 3. *Las funciones potencias $\{p_\mu\}_\mu$ constituyen una $\mathbb{Q}$-base para el algebra de funciones simétricas $\Lambda_{\mathbb{Q}}$.*

Igual debemos notar que $\{p_\mu\}_\mu$ no es una $\mathbb{Z}$-base de Λ, por ejemplo e_2 no se puede escribir como una combinación lineal de p_μ con coeficientes enteros, ya que es fácil de verificar que $e_2 = \frac{1}{2}(p_1^2 - p_2)$.

2.5. Funciones generadoras. Dado un parámetro formal t, tenemos las siguientes funciones generadores de las funciones simétricas mencionadas.

- La función generadora de las funciones simétricas elementales es dada por

$$E(t) = \sum_{r \geq 0} e_r t^r = \prod_{i \geq 1} (1 + x_i t)$$

- La función generadora de las funciones simétricas completas es dada por

$$H(t) = \sum_{r \geq 0} h_r t^r = \prod_{i \geq 1} \frac{1}{1 - x_i t} \tag{5}$$

- La función generadora de las funciones de sumas de potencias es dada por

$$P(t) = \sum_{r \geq 1} p_r t^{r-1} = \sum_i \frac{x_i}{1 - x_i t}.$$

Dadas estas funciones generadores, podemos obtener algunas propiedades que relacionan estas bases de funciones simétricas:

- Directo de la definición podemos obtener

$$H(t)E(-t) = 1,$$

por lo tanto, para cada $n \geq 1$,

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0 \tag{6}$$

• De la definición de $P(t)$ podemos ver que si consideramos $H'(t)$ la derivada de $H(t)$ con respecto a t, entonces

$$H'(t) = P(t)H(t) \tag{7}$$

así eligiendo el coeficiente de t^{n-1} en cada lado, obtenemos

$$nh_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}$$

para cada $n \geq 1$. También de las definiciones de $P(t)$ y $E(t)$ se tiene

$$P(-t) = E'(t)/E(t) \tag{8}$$

y de 7 se tiene

$$P(t) = \frac{d}{dt} \log H(t)$$

y por lo tanto

$$\begin{aligned} H(t) &= \exp\left(\sum_{r\geq 1} \frac{p_r t^r}{r}\right) \\ &= \prod_{r\geq 1} \exp\left(p_r t^r\right) \\ &= \prod_{r\geq 1} \left(\sum_{m_r\geq 0} \frac{1}{m_r!} \left(\frac{p_r t^r}{r}\right)^{m_r}\right), \end{aligned}$$

en el lado derecho escogemos el coeficiente de p_λ en ese producto. Si $\lambda = (1^{m_1}, 2^{m_2} \cdots)$, el coeficiente es

$$\prod_{r\geq 1} \frac{1}{r^{m_r} \cdot m_r!},$$

si definimos $z_\lambda = \prod_{r\geq 1}(r^{m_r} \cdot m_r!)$, tenemos

$$h_n = \sum_{\lambda \vdash n} z_\lambda^{-1} p_\lambda. \tag{9}$$

2.6. Funciones de Schur. Consideramos $x = (x_1, \ldots, x_n)$ y $\alpha = (\alpha_1, \ldots, \alpha_n) \in z^n$. Sea $x^\alpha = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \cdots x_n^{\alpha_n}$ un monomial. Definimos a_α por la antisimetrización de x^α, i.e.

$$a_\alpha(x) = a_\alpha(x_1, \ldots, x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} \epsilon(\sigma)\sigma(x^\alpha), \tag{10}$$

donde $\epsilon(\sigma)$ es el signo de la permutación σ y σ áctua sobre x^α permutando las variables, es decir $\sigma(x_i) = x_{\sigma(i)}$. Este polinomio es skew-simétrico, i.e. tenemos

$$\sigma(a_\alpha) = \epsilon(\sigma)a_\alpha$$

para cualquier $\sigma \in S_n$. Sea δ_n la partición dada por $(n-1, n-2, \ldots, 1, 0)$, entonces el polinomio skew-simétrico a_{δ_n} es el llamado determinante de Vandermonde, y este es igual al producto $\Pi_{i<j}(x_i - x_j)$. Si $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ es una partición de largo a lo más n. Definimos la función de Schur por

$$s_\lambda(x_1, \ldots, x_n) = a_{\lambda+\delta_n}/a_{\delta_n}.$$

No es difícil de ver que s_λ es un efectivamente un polinomio, ya que $a_{\lambda+\delta_n}$ es divisible por a_{δ_n} en el anillo de polinomios $\mathbb{Z}[x_1, \ldots, x_n]$. Además como $a_{\lambda+\delta_n}$ y a_{δ_n} son skew-simétricas, tenemos que s_λ es simétrico.

Proposición 4. *Sea λ una partición. Entonces las funciones de Schur satisfacen*

$$s_\lambda = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} K_{\lambda\mu} m_\mu$$

para algunos coeficientes $K_{\lambda\mu}$.

Los coeficientes $K_{\lambda\mu}$ dados en la proposición anterior corresponden al número de tableaux de forma λ y peso μ. También se tiene que $\{s_\lambda\}$ forma una $\mathbb{Z}-$*base* de Λ y para cada $n \geq 0$ el conjunto $\{s_\lambda\}_\lambda$ tal que $|\lambda| = n$ forma una base de Λ_n.

Por (3) y (4) se debe tener que cada función de Schur s_λ es igual a un polinomio en las funciones elementales e_r, y a un polinomio en las funciones completas h_r; las fórmulas explícitas de esta relación son dadas por

$$s_\lambda = \det(h_{\lambda_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq n} \tag{11}$$

donde $n \geq l(\lambda)$, y

$$s_\lambda = \det(e_{\lambda'_i - i + j})_{1 \leq i,j \leq m}, \tag{12}$$

donde $m \geq l(\lambda')$. En particular, se tiene

$$s_{(n)} = h_n$$

y

$$s_{(1^n)} = e_n.$$

2.7. Dualidad. Definimos un homomorfismo $\omega : \Lambda \to \Lambda$ por

$$\omega(e_r) = h_r$$

donde $r \geq 1$. Por la relación (6) tenemos $\omega(h_r) = e_r$ para cada r y por lo tanto $\omega^2 = 1$ y así es una involución.

Además por (7) y (8) se tiene que ω intercambia t en $-t$ sobre la función genaradora P, y así

$$\omega(p_r) = (-1)^r p_r.$$

También, usando (11) y (12) se tiene que ω actúa en una función de Schur de la forma

$$\omega(s_\lambda) = s_{\lambda'}. \tag{13}$$

2.8. Ortogonalidad. Definimos un producto escalar en Λ por

$$\langle p_\lambda, p_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda, \tag{14}$$

donde si $\lambda = (1^{m_1} 2^{m_2} \cdots)$, entonces $z_\lambda = \Pi_{r \geq 1}(r \cdot m_r!)$.

Si $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y $y = (y_1, y_2)$ son dos tipos de variables, si f es una función simétrica con respecto a las variables x_i, entonces denotamos $f(xy)$ la función simétrica con respecto a las variables $x_i y_j$. Definimos el kernel en x e y por

$$K(x, y) = \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j},$$

notemos que observando la función generadora en (5) se tiene

$$K(x, y) = \sum_{r \geq 0} h_r(xy)$$

y usando (9) se obtiene

$$K(x, y) = \sum_{r \geq 0} z_\lambda^{-1} p_\lambda(xy). \tag{15}$$

Además si $r \geq 0$, entonces $p_r(xy) = \sum_{i,j}(x_i y_j)^r = p_r(x) p_r(y)$, por lo tanto para toda partición λ

$$p_\lambda(xy) = p_\lambda(x) p_\lambda(y)$$

y así (15) nos queda

$$K(x, y) = \sum_{\lambda} z_\lambda^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y). \tag{16}$$

También tenemos de (5) que

$$\begin{aligned} K(x, y) &= \prod_j H(y_j) && (17)\\ &= \prod_j \sum_{\alpha_j \geq 0} h_{\alpha_j}(x) y_j^{\alpha_j} && (18)\\ &= \sum_\lambda h_\lambda(x) m_\lambda(y) && (19)\\ &= \sum_\lambda m_\lambda(x) h_\lambda(y). && (20) \end{aligned}$$

La siguiente proposición nos da una relación entre el kernel y la ortogonalidad:

Proposición 5. *Sea n un entero no-negativo. Si $\{u_\lambda\}$ y $\{v_\lambda\}$ son $\mathbb{Q}$-bases of Λ_n indexadas por las particiones de n, entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

a) *Para todo λ y μ particiones, $\langle u_\lambda, v_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}$.*
b) $\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = \Pi(x, y)$.

Notemos que por la definición del producto ortogonal y (16), las bases $\{p_\lambda\}$ y $\{z_\lambda^{-1} p_\lambda\}$ satisfacen las afirmaciones del teorema. Además de (20) tenemos

$$\langle h_\lambda, m_\mu \rangle = \delta_{\lambda\mu}.$$

3. Polinomios de Macdonald

Un caso muy general de funciones simétricas, son los llamados polinomios de Macdonald, estos polinomios poseen muchas propiedades combinatoriales. Los polinomios de Macdonald están indexados por particiones y dependen de dos parámetros formales q y t. Al especializar estos parámetros, podemos recuperar las funciones de Schur, los polinomios de Jack y los polinomios de Hall-Littlewood.

Sean q, t parámetros formales independientes. Consideramos $F = \mathbb{Q}(q, t)$ el cuerpo de funciones racionales en q y t, así consideramos el anillo de polinomios simétricos con coeficientes en F, definido por Λ_F como en (2).

TEOREMA 1. *Para cada λ particion, existe un único $P_\lambda(q, t)$ en Λ_F tal que*

$$P_\lambda(q,t) = m_\lambda + \sum_{\mu<\lambda} g_\mu(q,t) m_\mu \tag{21}$$

$$\langle P_\lambda(q,t), P_\mu(q,t)\rangle_{q,t} = 0 \quad si\ \lambda \neq \mu, \tag{22}$$

donde $g_\mu(q,t) \in \mathbb{Q}(q,t)$ y el producto escalar es definido por

$$\langle p_\lambda, p_\mu\rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}. \tag{23}$$

La existencia de estos polinomios se determina por la construcción de un operador $E_{q,t}$ en Λ_F que tiene las siguientes propiedades:

$$E_{q,t} m_\lambda = \sum_{\mu\leq\lambda} c_{\lambda\mu} m_\mu$$

con $c_{\lambda\mu} \in F$ y $c_{\lambda\lambda} \neq 1$; y además es autoadjunto con respecto al producto escalar definido en (23), es decir,

$$\langle E_{q,t} f, g\rangle_{q,t} = \langle f, E_{q,t} g\rangle_{q,t}.$$

Teniendo este operador, si P_λ satisface (21) y es valor propio de $E_{q,t}$, entonces entonces los coeficientes de cada monomial pueden ser calculados, lo que implica que estos polinomios P_λ existen. Además usando que $E_{q,t}$ es autoadjunto con respecto al producto escalar, se puede probar que P_λ satisface (22). La unicidad sigue de la condición que $\langle\langle P_\lambda, P_\lambda\rangle\rangle_{q,t} \neq 0$.

OBSERVACIÓN 2. *Para calcular un polinomio de Macdonald, podemos usar recursividad, por ejemplo dada la primera relación de triangularidad en* (21)*, tenemos que dado n,*

$$P_{(1^n)}(q,t) = m_{(1^n)}.$$

Sabemos por la condición 21 que

$$P_{(2)} = m_{(2)} + g_{(1,1)} m_{(1,1)}.$$

Luego debemos calcular el coeficiente $g_{(1,1)}$. Para ello, se sabe por la condición (22) *que*

$$\langle\langle P_{(2)}, P_{(1,1)}\rangle\rangle_{q,t} = 0.$$

Por lo tanto

$$0 = \langle\langle m_{(2)} + g_{(1,1)} m_{(1,1)}, m_{(1,1)}\rangle\rangle_{q,t} = \langle\langle m_{(2)}, m_{(1,1)}\rangle\rangle_{q,t} + g_{(1,1)}\langle\langle m_{(1,1)}, m_{(1,1)}\rangle\rangle.$$

Así podemos despejar $g_{(1,1)}(q,t)$

$$g_{(1,1)}(q,t) = -\frac{\langle\!\langle m_{(2)}, m_{(1,1)}\rangle\!\rangle}{\langle\!\langle m_{(1,1)}, m_{(1,1)}\rangle\!\rangle}.$$

Cambiando de base a los polinomios potencias y utilizando la definición del producto escalar dada en (23)*. De esta manera* $g_{(1,1)}(q,t)$ *puede ser calculado explícitamente.*

A continuación damos algunos ejemplos de polinomios de Macdonald expandidos en los monomiales.

Ejemplo 8.

- $P_{(2,1)}(q,t) = m_{(2,1)} + \frac{(1-t)(2+q+t+2t)}{1-qt^2} m_{(1,1,1)}$
- $P_{(3)}(q,t) = m_{(3)} + \frac{(1-t)^2(1+q)(1+q+q^2)}{(1-qt)(1-q^2t)} m_{(1,1,1)} + \frac{(1-t)(1+q+q^2)}{1-q^2t} m_{(2,1)}$
- $P_{(3,1)}(q,t) = m_{(3,1)} + \frac{(1-t)^2(1+q)(3+3q^2t+q^2+2qt+2q+t)}{(1+qt)(1-qt)^2} m_{(1,1,1,1)}$
  $+\frac{(1-t)(2+2q-qt+q^2-qt^2+q^2t-2q^2t^2-2q^3t^2)}{(1-qt)^2(1+qt)} m_{(2,1,1)} + \frac{(1-t)(1+q)}{(1-qt)} m_{(2,2)}$
- $P_{(2,1,1)}(q,t) = m_{(2,1,1)} + \frac{(1-t)(3qt^2+2qt+t^2+q+2t+3)}{1-qt^3} m_{(1,1,1,1)}$

Escribiendo los monomiales en 3 variables podemos obtener los polinomios de Macdonald en variables.

Ejemplo 9.

- $P_{(2,1)}(x_1,x_2,x_3;q,t) = x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1 + \frac{(1-t)(2+q+t+2t)}{1-qt^2} x_1x_2x_3$
- $P_{(3)}(x_1,x_2,x_3;q,t) = x_1^3 + x_2^3 + x_3^2 + \frac{(1-t)^2(1+q)(1+q+q^2)}{(1-qt)(1-q^2t)} x_1x_2x_3 + \frac{(1-t)(1+q+q^2)}{1-q^2t}(x_1^2x_2 + x_2^2x_1 + x_3^2x_2 + x_1^2x_3 + x_2^2x_3 + x_3^2x_1)$

Utilizando los polinomios de Macdonald, podemos recuperar diversas funciones simétricas, por ejemplo,

- Si $t = 1$, entonces $P_\lambda(x; q, 1) = m_\lambda(x)$
- Si $q = 1$, entonces $P_\lambda(x; 1, t) = e_{\lambda'}(x)$.
- Si $q = t$, entonces $P_\lambda(x; t, t) = s_\lambda(x)$,
- Si $q = 0$, entonces se tiene

  $$P_\lambda(x; 0, t) =: P_\lambda(x; t).$$

  Los polinomios $P_\lambda(x; t)$ son los llamados **polinomios de Hall-Littlewood** y han sido ampliamente estudiados.
- Si $q = t^\alpha$, y hacemos $t \to 1$, entonces

  $$\lim_{t\to 1} P_\lambda(x; t^\alpha, t) =: P_\lambda(x; \alpha).$$

  Los polinomios $P_\lambda(x; \alpha)$ son los llamados **polinomios de Jack**.

3.1. Operador $E_{q,t}$. La construcción de este operador $E_{q,t}$ es como sigue: sea $f \in F(x_1, \ldots, x_n) := \Lambda_{n,F}$, definimos $\tau_i : \Lambda_{n,F} \to \Lambda_{n,F}$ por

$$\tau_i f(x_1, \ldots, x_i, \ldots, x_n) = f(x_1, \ldots, qx_i, \ldots, x_n), \tag{24}$$

así definimos

$$D_n^1 = \sum_{i=1}^{n} \left(\prod_{j\neq i} \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j} \right) \tau_i,$$

la cuál es equivalente a

$$D_n^1 = a_{\delta_n}^{-1} \sum_{\sigma\in S_n} \varepsilon(\sigma) \sum_{i=1}^{n} t^{(\sigma\delta_n)_i} x^{\sigma\delta_n} \tau_i,$$

donde a_{δ_n} es el determinante de Vandermonde definido en (10). El operador D_n^1 no es compatible con el homomorfismo restricción $\Lambda_{n+1,F} \to \Lambda_{n,F}$ definido en (1), lo que implica que el operador depende del número de variables La idea es tener el operador en un número arbitrario de variables, por lo tanto, con el objetivo de que el operador no dependa del número de variables, se hace una una modificación:

$$E_n = t^{-n} D_n^1 - \sum_{i=1}^{n} t^{-i}.$$

Los operadores E_n si son compatibles con los homomorfismos $\Lambda_{n+1,F} \to \Lambda_{n,F}$, luego se define

$$E_{q,t} = \lim_{\substack{\longleftarrow \\ n}} E_n : \Lambda_F \to \Lambda_F.$$

Proposición 6. *Los polinomios de Macdonald son funciones propias de E, con valor propio que se detalla a continuación:*

$$E_{q,t}\ P_\Lambda(q,t) = \sum_{i\geq 1} (q^{\lambda_i} - 1)t^{-i}\ \ P_\lambda(q,t).$$

3.2. Operadores D_n^r. Se puede definir una clase mas general de operadores que los dados en la sección anterior, en el cuál el operador D_n^1 es un caso particular. Dados $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $0\le r\le n$ definimos

$$D_n^r=\sum_I A_I(x;t)\prod_{i\in I}\tau_i \tag{25}$$

donde la suma es sobre todos los subconjuntos $I\subset\{1,\ldots,n\}$ con $|I|=r$ y

$$A_I(x;t)=t^{r(r-1)/2}\prod_{i\in I;j\notin I}\frac{tx_i-x_j}{x_i-x_j}.$$

Cada D_n^r envía polinomios simétricos en polinomios simétricos. Además dado u un parámetro indeterminado, podemos definir

$$D_n(u;q,t)=\sum_{r=0}^n D_n^r u^r;$$

explicítamente este operador es dado por

$$D_n(u;q,t)=a_\delta(x)^{-1}\sum_{\sigma\in S_n}x^{\sigma(\delta)}\prod_{i=1}^n(1+ut^{(\sigma(\delta))_i}\tau_i).$$

Se puede calcular la acción de este operador en un monomial simétrico m_λ:

$$D_n(u;q,t)m_\lambda(x)=\sum_{\mu\le\lambda}a_{\lambda\mu}(u;q,t)m_\mu$$

con coeficientes $a_{\lambda\mu}\in\mathbb{Z}[u,q,t]$ y en particular

$$a_{\lambda\lambda}(u;q,t)=\prod_{i=1}^n(1+ut^{n-i}q^{\lambda_i}).$$

Además los polinomios de Macdonald son funciones propias del operador $D_n(u;q,t)$ y por lo tanto también son funciones propias de los operadores D_n^r:

Proposición 7. *Si $x=(x_1,\ldots,x_n)$ y $l(\lambda)\le n$, se tiene*

$$D_n(u;q,t)P_\lambda(x;q,t)=\prod_{i=1}^n(1+uq^{\lambda_i}t^{n-i})P_\lambda(x;q,t).$$

Luego los operadores D_n^r en $\Lambda_{n,F}$ son simultáneamente diagonalizados por la base $(P_\lambda^{q,t})$ y por lo tanto conmutan entre ellos.

3.3. Kernel y Ortogonalidad. Sean $x=(x_1,x_2,\ldots)$ y $y=(y_1,y_2,\ldots)$. El Kernel es definido por

$$K(x,y;q,t)=\prod_{i,j}\frac{(tx_ix_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty} \tag{26}$$

donde

$$(a;q)_\infty=\prod_{r=0}^\infty(1-aq^r).$$

Tenemos dos resultados que son la extensión de los resultados presentados en la Sección 2.8:

PROPOSICIÓN 8.

$$K(x,y;q,t) = \sum_{\lambda} z_\lambda(q,t)^{-1} p_\lambda(x) p_\lambda(y) \tag{27}$$

donde

$$z_\lambda(q,t) = z_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda} \frac{1-q^{\lambda_i}}{1-t^{\lambda_i}}.$$

PROPOSICIÓN 9. *Para cada entero $n \geq 0$, sean $(u_\lambda), (v_\lambda)$ $\mathbb{Q}(q,t)$-bases de Λ_n, indexados por las particiones de n. Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

a) $\langle u_\lambda, v_\lambda \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu}$ *for all* λ, μ.
b) $\sum_\lambda u_\lambda(x) v_\lambda(y) = K(x,y;q,t)$

Otro resultado importante es que los operadores D_n^r son autoadjuntos con respecto al producto escalar definido en (23), es decir

$$\langle D_n^r f, g \rangle_{q,t} = \langle f, D_n^r g \rangle_{q,t}$$

para todo $f, g \in \Lambda_F$ y $0 \leq r \leq n$. La demostración de esto, sigue de la identidad

$$D_n(u;q,t)_x K(x,y;q,t) = D_n(u;q,t)_y K(x,y;q,t). \tag{28}$$

donde $D_n(u;q,t)_x$ es el operador dado en (25) y $D_n(u;q,t)_y$ es el mismo operador pero reemplazando x por y. La identidad (28) no es un resultado fácil de probar, la demostración puede encontrarse en [**1**].

3.4. Dualidad. Los polinomios de Macdonald $P_\lambda(q,t) = P_\lambda$ forman una base ortogonal de $\Lambda_{n,F}$, relativo al produto escalar definido en (23). Sea $b_\lambda(q,t) = \langle P_\lambda, P_\lambda \rangle_{q,t}^{-1}$ y definimos $Q_\lambda(x;q,t) = b_\lambda(q,t) P_\lambda(x;q,t)$, entonces tenemos

$$\langle P_\lambda(q,t), Q_\mu(q,t) \rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu}$$

y entonces por la Proposición 9 tenemos

$$\sum_\lambda P_\lambda(x;q,t) Q_\lambda(y;q,t) = K(x,y;q,t).$$

En $\Lambda_{n,F}$ definimos un automorfismo $\omega_{q,t}$ de $\mathbb{Q}(q,t)$-algebra por

$$\omega_{q,t}(p_r) = (-1)^r \frac{1-q^r}{1-t^r} p_r$$

para cada $r \geq 1$; notemos que este automorfismo es una extensión del automorfismo definido en la Sección 2.7.

PROPOSICIÓN 10. *Para cada partición λ tenemos*

$$\omega_{q,t} P_\lambda(q,t) = Q_{\lambda'}(t,q).$$

El resultado anterior, es una extensión de la dualidad para funciones de Schur dado en (13).

3.5. Evaluación. Consideramos u un parámetro indeterminado. Se define una evaluación en Λ_n por

$$\begin{aligned}\varepsilon_{u,t} : \Lambda_n &\to \mathbb{Q}(q,t)\\ \varepsilon_{u,t}(p_r) &= \frac{1-u^r}{1-t^r}\end{aligned}$$

para cada $r \geq 1$. Notemos que si $u = t^n$, donde n es un entero positivo, tenemos

$$\begin{aligned}\varepsilon_{t^n,t}(p_r) &= \frac{1-t^{nr}}{1-t^r}\\ &= 1 + t^r + \ldots + t^{(n-1)r}\\ &= p_r(1,t,\ldots,t^{n-1})\end{aligned}$$

y por lo tanto

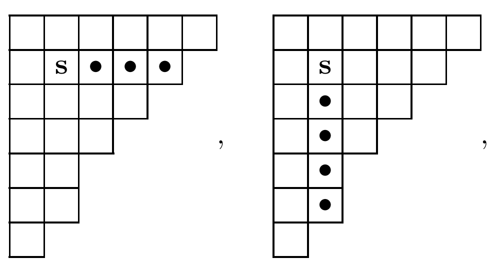
$$\varepsilon_{t^n,t}(f) = f(1,t,\ldots,t^{n-1})$$

para cada función simétrica f.

Fórmula largo-brazo $a_\lambda(s)$ y el largo-pierna $l_\lambda(s)$. Sea una caja o célula s en el diagrama de λ. Para cada $s = (i,j)$ en el diagrama de una partición $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots)$ se definen las fórmulas largo-brazo a_λ y largo-pierna l_λ por

$$\begin{aligned}a_\lambda(s) &= \lambda_i - j,\\ l_\lambda(s) &= \lambda'_j - i.\end{aligned}$$

Así entendemos el brazo de una caja, como las cajas que se encuentran a la derecha y la pierna corresponde a las cajas que se encuentran hacia abajo de esa caja, luego el largo-brazo y el largo-pierna corresponden a la cantidad de cajas en el brazo y la cantidad de cajas en la pierna respectivamente. Por ejemplo consideremos la caja s de la partición λ cuyo diagrama es



luego las cajas marcadas con un punto en el primer diagrama corresponde al brazo de s y las cajas marcadas en el segundo diagrama corresponden a la pierna de s, entonces se tiene

$$a_\lambda(s) = 3 \qquad \text{y} \qquad l_\lambda(s) = 4.$$

Con estas definiciones, se tiene una fórmula explícita para la evaluación de un polinomio de Macdonald:

Theorem 1. *Sea λ una partición. Entonces tenemos*

$$\varepsilon_{u,t}(P_\lambda(q,t)) = \prod_{s\in\lambda} \frac{q^{a'_\lambda(s)}u - t^{l'_\lambda(s)}}{q^{a_\lambda(s)}t^{l_\lambda(s)+1} - 1},$$

donde si $s = (i, j)$ en el diagrama de λ, entonces

$$a'_\lambda(s) = j - 1 \qquad y \qquad l'_\lambda(s) = i - 1.$$

3.6. Norma. Se tiene la siguiente relación entre el automorfismo ω y la evaluación

$$\varepsilon_{u,t}\omega_{t,q}(f) = (-q)^{-r}\varepsilon_{u,q^{-1}}(f),$$

para toda f función simétrica; la cuál se puede verificar fácilmente en p_r. Luego si usamos que $\omega_{q,t}P_\Lambda(q,t) = Q_{\lambda'}(t,q)$ y la fórmula de evaluación en la sección anterior, podemos obtener una fórmula para la norma:

Teorema 2. *Sea λ una partición, entonces tenemos*

$$\langle P_\lambda(q,t), P_\lambda(q,t)\rangle_{q,t} = \prod_{s\in\lambda} \frac{h^\lambda(s)}{h_\lambda(s)}.$$

donde $h_\lambda(s)$ y $h^\lambda(s)$ son las fórmulas tipo-hook dadas por

$$h_\lambda(s) = 1 - q^{a_\lambda(s)}t^{l_\lambda(s)+1} \tag{29}$$

$$h^\lambda(s) = 1 - q^{a_\lambda(s)+1}t^{l_\lambda(s)}. \tag{30}$$

El teorema anterior, nos da una fórmula combinatorial para la norma cuadrada, ya que $\|P_\lambda\|^2 = \langle P_\lambda, P_\lambda\rangle$.

3.7. Reglas de Pieri. Para funciones de Schur, tenemos la siguiente fórmula de Pieri

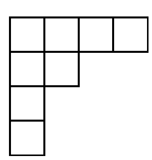
$$h_r s_\lambda = \sum_\mu s_\mu$$

donde la suma es sobre todos las particiones μ tal que μ/λ es un horizontal r-strip. Y usando el homomorfismo ω se puede obtener que

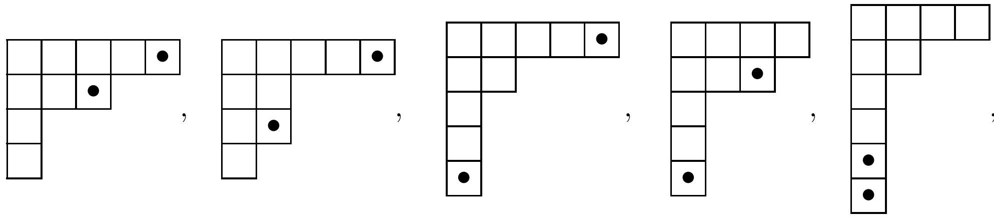
$$e_r s_\lambda = \sum_\mu s_\mu$$

donde la suma es sobre todas las particiones μ tal que μ/λ es un vertical r-strip, es decir, las particiones μ son obtenidas al agregar r cajas en el diagrama λ de tal forma que no se pueden agregar más de una caja por cada fila.

Ejemplo 10. *Para obtener $e_2 s_{(4,2,1,1)}$, debemos encontrar todas las particiones que se obtienen al agregar 2 cajas en el diagrama*



de tal forma que no se pueden agregar dos cajas en la misma fila, de esta manera podemos tener las siguientes particiones



luego se tiene

$$e_2 s_{(4,2,1,1)} = s_{(5,3,1,1)} + s_{(5,2,2,1)} + s_{(5,2,1,1,1)} + s_{(4,3,1,1,1)} + s_{(4,2,1,1,1,1)}.$$

Para polinomios de Macdonald, podemos extender esta regla de Pieri:

TEOREMA 3. *Sea λ una partición, para polinomios de Macdonald tenemos*

$$e_r P_\lambda(q,t) = \sum_\mu \Phi_{\mu\lambda} P_\mu(q,t),$$

donde $\Phi_{\mu\lambda}$ es una función racional en q y t, los cuáles tienen una interpretación combinatorial a partir de fórmulas tipo-hook, definidas en (29) *y* (30)*, y la suma es sobre todos los μ tal que μ/λ es un vertical r-strip.*

Para dar explícitamente los coeficientes $\Phi_{\lambda\mu}$, primero se define $C_{\mu/\lambda}$ (respectivamente $R_{\mu/\lambda}$) como la unión de las columnas (respectivamente filas) que intersectan el skew diagram μ/λ. Usando las fórmulas tipo-hook definidas en (29) y (30), los coeficientes $\Phi_{\lambda\mu}$ son dados por

$$\Phi_{\mu\lambda} = \prod_{s \in C_{\lambda/\mu} - R_{\Lambda/\mu}} \frac{h_\lambda(s)}{h^\lambda(s)} \cdot \frac{h^\mu(s)}{h_\mu(s)}.$$

Para demostrar esta regla de Pieri se define: para cada μ partición con $l(\lambda) \leq n$ se tiene la evaluación

$$u_\lambda : F[x_1, \ldots, x_n] \to F$$

definida para cada $1 \leq i \leq n$ por $u_\lambda(x_i) = q^{\mu_i} t^{i-1}$. En particular notemos que

$$u_0(f) = f(t^{n-1}, t^{n-2}, \ldots, 1)$$

para cualquier polinomio $f \in F[x_1, \ldots, x_n]$, por lo tanto u_0 corresponde a la evaluación $\varepsilon_{t^n,t}$ definida en la Sección 3.5. Esta evaluación tiene la siguiente importante propiedad de simetría:

PROPOSICIÓN 11. *Para todas las particiones λ, μ de largo menor o igual a n, se tiene*

$$u_\lambda\left(\tilde{P}_\mu(q,t)\right) = u_\mu\left(\tilde{P}_\lambda(q,t)\right).$$

donde

$$\tilde{P}_\mu(q,t) = \frac{P_\mu(q,t)}{u_0(P_\mu(q,t))}.$$

Esta demostración puede ser encontrada en la sección 6, capítulo VI de [**1**]. Es uno de los resultados mas fuertes con respecto a polinomios de Macdonald, y en la demostración se pueden desprender varios corolarios como por ejemplo las reglas de Pieri.

3.8. Substitución Pletística. Podemos pensar las funciones simétricas como operadores sobre expresiones que involucran a las variables. Este punto de vista consiste en notación que proviene del estudio de $\lambda-$anillos y operaciones pletísticas. Esta notación tendrá un rol fundamental en los Multi-polinomios simétricos de Macdonald definidos en el Capítulo 5. A continuación se define la substitución pletística.

Supongamos A es una función racional en $\mathbb{R}(x)$, en algún, en algún conjunto de variables $x = x_1, x_2, \ldots$ Definimos

$$p_k[A] := A|_{x_i \mapsto x_i^k}.$$

Esto quiere decir, que cada x_i en A es reemplazado por x_i^k. De esta manera se puede verificar que si A y B son funciones racionales, entonces

$$\begin{aligned} p_k[A+B] &= p_k[A] + p_k[B] \quad \text{y} \\ p_k[A \cdot B] &= p_k[A] \cdot p_k[B]. \end{aligned}$$

En particular, si $x = x_1 + x_2 + \cdots$, se puede ver que

$$p_k[x] = x_1^k + x_2^k + \cdots$$

y por lo tanto $p_k[x]$ es usual de suma de potencias en las variables $x = x_1, x_2, \ldots$. Consideremos cualquier función simétrica f. Escribiendo f en términos de la base de funciones p_λ, tenemos $f = \sum_\lambda a_\lambda p_\lambda$ y por la tanto podemos definir:

$$f[A] := \sum_\lambda a_\lambda \prod_{i=1}^{l(\lambda)} p_{\lambda_i}[A].$$

Esta es llamada la substitución pletística de A en f.

Ejemplo: Consideramos $A = \frac{x_1^2 - 3x_2 + 4x_3}{x_1 - x_2^3 + 5x_3}$. Entonces

$$p_4[A] = \frac{x_1^8 - 3x_2^4 + 4x_3^4}{x_1^4 - x_2^{12} + 5x_3^4}.$$

3.9. Forma entera de Polinomios de Macdonald. A continuación presentamos una variación de los polinomios de Macdonald utilizando la substitución pletística en los polinomios de Macdonald definidos en la Sección 3. En este caso la substituación pletística áctua también sobre los parámetros q y t. Es decir, si B es una función racional en $\mathbb{Q}(q,t)$, se tiene que

$$p_r[B] = B|_{\substack{q \mapsto q^r \\ t \mapsto t^r}}.$$

Por ejemplo

$$p_r\left[\frac{1 - q + q^2}{t + t^3}\right] = \frac{1 - q^r + q^{2r}}{t^r + t^{3r}}.$$

Esta variación será denotada por $H_\lambda^{(q,t)}$ y tienen diversas propiedades que detallaremos mas adelante. Definimos $H_\lambda^{(q,t)}$ por

$$H_\lambda(x;q,t) := P_\lambda\left[\frac{x}{1-t}; q, t^{-1}\right] \prod_{c \in \lambda} (q^{a(c)} - t^{l(s)+1}),$$

donde $a(c)$ y $l(c)$ son las fórmulas de largo-brazo y largo-pierna de la caja c en el diagrama de λ. Con este cambio, al calcular H_λ se puede observar que al extenderlos nos dan expresiones mas simples, por ejemplo:

$$\begin{aligned} H_{(3,1)}(x;q,t) = {}& \frac{1}{24}(q^2t + 3q^2 + 2qt + 2q + 3t + 1)p_1^4 - \frac{1}{4}(q^3t + q^3 - q^2t - q^2 + qt - q - t - 1)p_2p_1^2 + \\ & + \frac{1}{3}(qt-1)(q+1)(q-1)p_3p_1 + \frac{1}{8}(q^2+1)(q-1)(t-1)p_2^2 - \frac{1}{4}(q+1)(q-1)^2(t-1)p_4. \end{aligned}$$

Extendiendo H_λ en las funciones de Schur, considerando $n = 4$. obtenemos:

$$\begin{aligned}
H_{(4)} &= s_4 + (q^3 + q^2 + q)s_{(3,1)} + (q^4 + q^2)s_{(2,2)} + (q^5 + q^4 + q^3)s_{(2,1,1)} + q^6 s_{(1,1,1,1)},\\
H_{(3,1)} &= s_4 + (q^2 + q + t)s_{(3,1)} + (q^2 + qt)s_{(2,2)} + (q^3 + q^2t + qt)s_{(2,1,1)} + q^3 t s_{(1,1,1,1)},\\
H_{(2,2)} &= s_4 + (qt + q + t)s_{(3,1)} + (q^2 + t^2)s_{(2,2)} + (q^2t + qt^2 + qt)s_{(2,1,1)} + q^2t^2 s_{(1,1,1,1)}\\
H_{(2,1,1)} &= s_4 + (q + t + t^2)s_{(3,1)} + (qt + t^2)s_{(2,2)} + (qt + qt^2 + t^3)s_{(2,1,1)} + qt^3 s_{(1,1,1,1)},\\
H_{(1,1,1,1)} &= s_4 + (t + t^2 + t^3)s_{(3,1)} + (t^2 + t^4)s_{(2,2)} + (t^3 + t^4 + t^5)s_{(2,1,1)} + t^6 s_{(1,1,1,1)}.
\end{aligned}$$

En general, la extensión de los polinomios de Macdonald H_λ en las funciones de Schur se escribe

$$H_\lambda(x; q, t) = \sum_{\mu \vdash n} K_{\mu,\lambda}(q, t) s_\lambda(x)$$

donde los $K_{\mu,\lambda}(q, t)$ son los llamados $q, t-$polinomios de Kostka. Se puede observar que $K_{\mu,\lambda}(0, 1) = K_{\mu,\lambda}$ son los números de Kostka.

En 1988, Macdonald conjeturó que los coeficientes de estos polinomios erán enteros positivos, es decir $K_{\mu,\lambda}(q, t) \in \mathbb{N}[q, t]$. Esto fue demostrado por Haiman en [**25**].

CHAPTER 2

Funciones Simétricas en el superespacio

En el Capítulo 1, las variables $(x_1, x_2, \ldots)$ son variables que conmutan entre ellas y por lo tanto podemos pensar que correspondan al espacio Euclideano. Podemos extender este espacio Euclideano agregando variables que anticonmutan, esta espacio extendido es llamado superespacio. Las variables involucradas serán $(x_1, \ldots, x_N)$ y $(\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N)$, donde las variables θ_i son variables que anticonmutan entre ellas. Una función en el superespacio, es una función $f(x; \theta) = f(x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N)$. Las variables x son también llamadas variables bosónicas y las variables θ también se pueden llamar variables fermiónicas. Debemos mencionar también que las variables fermiónicas son llamadas variables de Grassmann.

Formalmente consideremos las variables $x_1, x_2, \ldots, x_N$ y las variables $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_N$ con las siguientes relaciones: para todo i, j se tiene

$$x_i x_j = x_j x_i, \tag{31}$$

$$\theta_i \theta_j = -\theta_j \theta_i, \tag{32}$$

$$\theta_i x_j = x_j \theta_i \tag{33}$$

El anillo de polinomios en N variables en el superespacio es dado por $\mathbb{Q}[x; \theta] := \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N]$. Sea $\sigma \in S_N$, definimos K_σ como el operador que actúa permutando las variables x_i, es decir si $f \in \mathbb{Q}[x; \theta]$, entonces

$$K_\sigma f(x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N) = f(x_{\sigma(1)}, \ldots, x_{\sigma(N)}; \theta_1, \ldots, \theta_N)$$

y se define k_σ como el operador que actúa permutando las variables θ_i. Luego, si $f \in \mathbb{Q}[x; \theta]$, entonces

$$k_\sigma f(x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N) = f(x_1, \ldots, x_N; \theta_{\sigma(1)}, \ldots, \theta_{\sigma(N)}).$$

Dado $\sigma \in S_N$, definimos el operador $\mathcal{K}_\sigma = K_\sigma k_\sigma$; decimos que $f \in \mathbb{Q}[x; \theta]$ es una función simétrica en el superespacio si

$$\mathcal{K}_\sigma f = f. \tag{34}$$

Es decir $f \in \mathbb{Q}[x; \theta]$ es simétrico si es invariante bajo el intercambio simultáneo de las variables x_i y de las variables θ_i. Tales polinomios son también llamados superpolinomios simétricos. El grado fermiónico de un superpolinomio corresponde a la cantidad de variables θ que tiene cada término.

Ejemplos. Los siguientes polinomios son simétricos en el superespacio:

$$\theta_1 x_2^2 + \theta_2 x_1^2, \qquad \theta_1 \theta_2 (x_1^3 x_2 - x_2^3 x_1), \qquad \theta_1 \theta_2 (x_1^4 - x_2^4).$$

En el primer caso el grado fermiónico del primer superpolinomio simétrico es 1, en el segundo caso es 2, al igual que en el tercer ejemplo.

Notemos que debido a la relacioń (32) se tiene que

$$\theta_i^2 = 0,$$

por lo tanto ningún polinomio en el superespacio puede tener variables θ_i con potencias mayor a 1. Denotamos el álgebra de polinomios simétricos en el superespacio de grado fermiónico m y con N variables por

$$\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N]^{S_N, m}. \tag{35}$$

Y el álgebra de polinomios simétricos de N variables con todos los grados fermiónicos menores o iguales a N se denotará por

$$\mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N]^{S_N} = \bigcup_{m=0}^{N} \mathbb{Q}[x_1, \ldots, x_N; \theta_1, \ldots, \theta_N]^{S_N, m}.$$

Ejemplos: Los siguientes polinomios pertenecen a $\mathbb{Q}[x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3]^{S_3, 2}$,

$f(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1\theta_2(x_1^2 - x_2^2) + \theta_1\theta_3(x_1^2 - x_3^2) + \theta_2\theta_3(x_2^2 - x_3^2)$

$g(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1\theta_2 x_1 x_2 x_3(x_1^2 - x_2^2) + \theta_1\theta_3 x_1 x_2 x_3(x_1^2 - x_3^2) + \theta_2\theta_3 x_1 x_2 x_3(x_2^2 - x_3^2)$

Al igual que en el capítulo anterior, en realidad nos interesa trabajar en un número arbitrario de variables y en cualquier grado fermiónico. Los detalles de esto son dados en sección 2.2 de [**3**]. Este será un algebra bigraduado dependiendo del número de variables y el grado fermiónico. Así denotaremos el algebra de funciones simétricas en el superespacio por:

$$\mathbb{Q}[x_1, x_2, \ldots; \theta_1, \theta_2, \ldots]^{S_\infty}.$$

Sus bases serán indexadas por un objeto combinatorial que es llamada superpartición. Nos referiremos a las funciones en el superespacio y a las funciones simétricas en el superespacio por superfunciones y superfunciones simétricas respectivamente.

1. Superparticiones

Una superpartición es una extensión de una partición. Se define como un par de particiones, donde la primera partición es estrictamente decreciente y la segunda partición es una partición usual. Es decir si $\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s)$ es una superpartición entonces $\Lambda^a = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m)$ es una partición que admite 0 y que satisface

$$\Lambda_1 > \Lambda_2 > \ldots > \Lambda_m$$

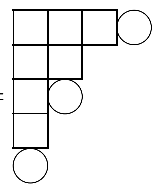
y $\Lambda^s = (\Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_N)$ es una partición usual. El grado fermiónico de la partición Λ corresponde a $l(\Lambda^a) = m$, y $|\Lambda| = |\Lambda^a| + |\Lambda^s|$ y si además $|\Lambda| = n$, decimos que Λ es una superpartición de grado $(n|m)$ y lo denotamos por $\Lambda \vdash (n|m)$. El largo de la superpartición es $l(\Lambda) = l(\Lambda^a) + l(\Lambda^s)$. El conjunto de las todas las superparticiones de $(n|m)$ es denotado por $SPar(n|m)$.

Ejemplos:

- La superpartición $\Lambda = (4, 2, 1; 3, 2, 1, 1)$ tiene grado fermionico 3 y como $|\Lambda| = 14$, entonces Λ es superpartición de $(14|3)$.
- $SPar(2|1) = \{(1, 0; 1), (2, 0; \ )\}$
- $SPar(4|2) = \{(1, 0; 1, 1, 1), (1, 0; 2, 1), (1, 0; 3), (2, 0; 1, 1), (2, 0; 2), (2, 1; 1), (3, 0; 1), (3, 1; \ ), (4, 0; \ )\}$.

La superpartición $(3,1;\ )$ indica que $\Lambda^s = \emptyset$, también se puede denotar por $(3,1;\emptyset)$. Notemos también que $SPar(n|0) = Par(n)$, en ese caso $\Lambda^a = \emptyset$ y por lo tanto cada superpartición de $SPar(n|0)$ es, en realidad, una partición usual.

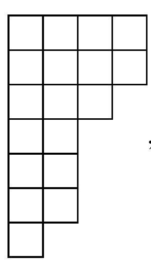
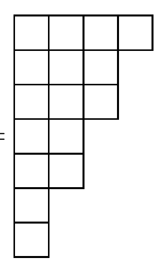
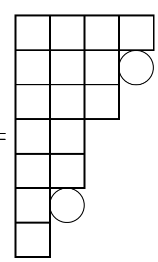
A cada superpartición $\Lambda = (\Lambda^a;\Lambda^s)$ podemos asociar un diagrama de Ferrer de la siguiente manera: ordenamos Λ de mayor a menor y hacemos el diagrama de Ferrer asociado a la partición ordenada Λ, luego agregamos un círculo al final de cada fila que proviene de Λ^a. Por ejemplo si $\Lambda = (3,1,0;2,1)$, ordenando y marcando los números que provienen de Λ^a por una barra nos queda la partición ordenada $\Lambda = (\overline{3},2,\overline{1},1,\overline{0})$ y entonces en cada componente con una barra ponemos un círculo al final de esa fila, y así nos queda el diagrama:

$\Lambda =$ 

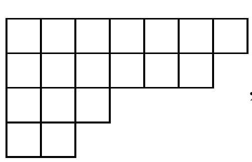
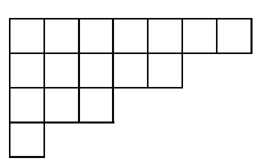
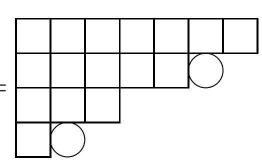
Otra caracterización de una superpartición es dada a continuación: una superpartición de grado $(n|m)$ de largo l es un par de particiones $\Lambda = (\Lambda^{\circledast},\Lambda^*)$ tal que:

(1) $\Lambda^* \subseteq \Lambda^{\circledast}$
(2) $|\Lambda^*| = n$,
(3) $l(\Lambda^{\circledast}) = l$
(4) $\Lambda^{\circledast}/\Lambda$ es simultáneamente un vertical y horizontal $m-$strip.

La correspondencia entre $(\Lambda^{\circledast},\Lambda^*)$ y (Λ^a,Λ^s) es dada explícitamente: dado $(\Lambda^{\circledast},\Lambda^*)$, las componentes de Λ^a corresponden a los componentes de Λ^* que satisfacen $\Lambda_i^{\circledast} \neq \Lambda_i^*$ y las partes de Λ^s corresponden a las partes de Λ^* que satisfacen que $\Lambda_i^{\circledast} = \Lambda_i^*$. De esta manera podemos ver que el diagrama de una superpartición Λ escrita de la forma $(\Lambda^{\circledast},\Lambda^*)$ consiste en hacer el diagrama de $\Lambda^{\circledast}$ y cada célula del skew-diagrama $\Lambda^{\circledast}/\Lambda^*$ en $\Lambda^{\circledast}$ se cambia por un círculo. Por ejemplo $\Lambda = (4,4,3,2,2,2,1;4,3,3,2,2,1,1)$ tiene el siguiente diagrama:

$\Lambda^{\circledast} =$  $,\Lambda^* =$  $\Longrightarrow \Lambda =$ 

Notemos que el número de círculos del diagrama corresponde al grado fermiónico de la superpartición. El conjugado de una superpartición Λ es la superparticón Λ' consiste en transponer el diagrama de Λ con respecto a su diagonal principal. Explícitamente, si $\Lambda = (\Lambda^{\circledast},\Lambda^*)$ entonces $\Lambda' = (\Lambda^{\circledast\prime},\Lambda^{*\prime})$, de esta forma, el conjugado de $\Lambda = (4,4,3,2,2,2,1;4,3,3,2,2,1,1)$ es

$\Lambda^{\circledast\prime} =$  $,\Lambda^{*\prime} =$  $\Longrightarrow \Lambda' =$ 

También podemos escribir que el conjugado de $\Lambda = (3,1;4,3,2,2,1)$ es $\Lambda' = (5,1;7,3)$. Evidentemente, de la definición de conjugación se tiene

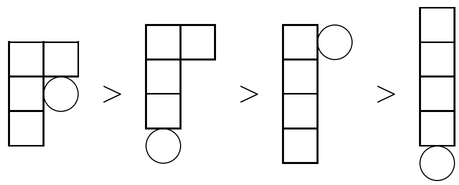
$$(\Lambda')' = \Lambda.$$

Se extiende el **orden de dominancia** a las superparticiones de la siguiente manera: sean $\Lambda = (\Lambda^{\circledast}, \Lambda^{*})$ y $\Omega = (\Omega^{\circledast}, \Omega^{*})$ dos superparticiones, si $\Lambda, \Omega \in SPar(n|m)$, entonces

$$\Lambda \geq \Omega \Longleftrightarrow \Lambda^{\circledast} \geq \Omega^{\circledast} \quad \text{y} \quad \Lambda^{*} \geq \Omega^{*}, \tag{36}$$

donde el orden en el lado derecho es el orden usual de dominancia entre particiones.

Ejemplo 11. *Tenemos las siguientes superparticiones ordenadas*



2. Funciones simétricas clásicas en el superespacio

En esta sección se presentará una extensión de las resultados dados en la Sección 2. Los resultados de esta sección fueron desarrollados por Desrosiers, Lapointe y Mathieu en [**3**]. En este artículo se mostraron las bases además de diversos resultados de los polinomios simétricos que pudieron ser extendidos al superespacio. Observemos que las superparticiones son ahora, los objetos combinatoriales que indexan estas bases.

2.1. Monomiales simétricos en el superespacio. Dado un $\Lambda \in Spar(n|m)$, asociamos el monomial simétrico $m_\Lambda := m_\Lambda(x;\theta)$ definido por

$$m_\Lambda = \sum_{\sigma \in S_N}{}' \theta_{\sigma(1)}\theta_{\sigma(2)} \cdots \theta_{\sigma(m)} x_{\sigma(1)}^{\Lambda_1} x_{\sigma(2)}^{\Lambda_2} \cdots x_{\sigma(N)}^{\Lambda_N},$$

donde el simbolo prima en la sumatoria, simboliza que la suma es sobre todos los términos distintos. También nos referiremos a los monomiales en el superespacio, como supermonomiales.

Ejemplo 12. *Veamos algunos ejemplos de monomiales en el superespacio:*

$$\begin{aligned} m_{(2;2,1)}(x_1,x_2,x_3;\theta_1,\theta_2,\theta_3) &= \theta_1 x_1^2 x_2^2 x_3 + \theta_2 x_2^2 x_1^2 x_3 + \theta_1 x_1^2 x_3^2 x_2 + \theta_3 x_3^2 x_2^2 x_1 + \theta_2 x_2^2 x_3^2 x_1 + \theta_3 x_3^2 x_1^2 x_2 \\ &= \theta_1(x_1^2 x_2^2 x_3 + x_1^2 x_3^2 x_2) + \theta_2(x_2^2 x_1^2 x_3 + x_2^2 x_3^2 x_1) + \theta_3(x_3^2 x_2^2 x_1 + x_3^2 x_1^2 x_2). \end{aligned}$$

$$m_{(2,2;1)}(x_1,x_2,x_3;\theta_1,\theta_2,\theta_3) = \theta_1\theta_2 x_1^2 x_2^2 x_3 + \theta_1\theta_3 x_1^2 x_3^2 x_2 + \theta_3\theta_2 x_3^2 x_2^2 x_1.$$

$$\begin{aligned} m_{(2,0;1)}(x_1,x_2,x_3;\theta_1,\theta_2,\theta_3) &= \theta_1\theta_2 x_1^2 x_3 + \theta_2\theta_1 x_2^2 x_3 + \theta_3\theta_2 x_3^2 x_1 + \theta_1\theta_3 x_1^2 x_2 + \theta_2\theta_3 x_2^2 x_1 + \theta_3\theta_1 x_3^2 x_2 \\ &= \theta_1\theta_2(x_1^2 x_3 - x_2^2 x_3) + \theta_2\theta_3(x_2^2 x_1 - x_3^2 x_2) + \theta_1\theta_3(x_1^2 x_2 - x_3^2 x_2). \end{aligned}$$

2.2. Funciones simétricas elementales en el superespacio. En el superespacio, consideraremos dos tipos de funciones elementales, dado $r \geq 1$ definimos

$$e_r = m_{(\ ;1^r)} = \sum_{j_1 < \cdots j_r} x_{j_1} \cdots x_{j_r}$$

y para $r \geq 0$, definimos

$$\widetilde{e_r} = m_{(0;1^r)} = \sum_{i \geq 1} \sum_{J, i \notin J} \theta_i x_{j_1} \cdots x_{j_r},$$

donde la suma es sobre todos los subconjuntos J con $|J| = r$ y además $j_1 < j_2 < \cdots < j_r$ están en J. Además ponemos $e_0 = 1$ y notemos que

$$\widetilde{e_0} = \sum_i \theta_i = \theta_1 + \theta_2 + \ldots$$

Dada una superpartición $\Lambda = (\Lambda^a, \Lambda^s) = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m; \Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_N)$ de $(n|m)$ definimos la función simétrica e_Λ por

$$e_\Lambda = \prod_{i=1}^{m} \widetilde{e_i} \cdot \prod_{i=m+1}^{N} e_i.$$

Ejemplo 13. *Si $\Lambda = (2;1)$, entonces $e_\Lambda = \widetilde{e_2} \cdot e_1$, donde en variables tenemos*

$$\widetilde{e_2}(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = \theta_1 x_2 x_3 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_3 x_1 x_2$$

y

$$e_1(x_1, x_2, x_3) = x_1 + x_2 + x_3.$$

Por lo tanto $e_{(2;1)} = (\theta_1 x_2 x_3 + \theta_2 x_1 x_3 + \theta_3 x_1 x_2) \cdot (x_1 + x_2 + x_3)$

2.3. Sumas de potencias en el superespacio. Dado $r \geq 0$, definimos las funciones de sumas de potencias en el superespacio por

$$p_r = m_{(\ ;r)} = \sum_i x_i^r$$

y

$$\widetilde{p_r} = m(r;0) = \sum_i \theta_i x_i^r;$$

luego para una superpartición $\Lambda = (\Lambda_1, \ldots, \Lambda_m; \Lambda_{m+1}, \ldots, \Lambda_N)$ de $(n|m)$ definimos

$$p_\Lambda = \prod_{i=1}^{m} \widetilde{p_i} \prod_{i=m+1}^{N} p_i.$$

Ejemplo 14. *Si consideramos la superpartición $\Lambda = (2, 1; 2)$ entonces $p_{(2,1;2)} = \widetilde{p_2}\widetilde{p_1}p_2$, donde en 3 variables tenemos*

$$\begin{aligned}
\widetilde{p_2}(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_2^2 + \theta_3 x_3^2 \\
\widetilde{p_1}(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) &= \theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3 \\
p_2 &= x_1^2 + x_2^2 + x_3^2
\end{aligned}$$

y así

$$p_{(2,1;2)}(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3) = (\theta_1 x_1^2 + \theta_2 x_2^2 + \theta_3 x_3^2)(\theta_1 x_1 + \theta_2 x_2 + \theta_3 x_3)(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2).$$

2.4. Funciones simétricas completas. La n-esima función simétrica completa bosónica y fermiónica son definidas por

$$h_n := \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$$

y

$$\tilde{h}_n := \sum_{\Lambda \vdash (n|1)} (\Lambda_1 + 1) m_\Lambda.$$

Además si Λ es una superpartición de $(n|m)$, entonces se define

$$h_\Lambda = \prod_{i=1}^{m} \tilde{h}_i \prod_{i=m+1}^{l(\Lambda)} h_i.$$

2.5. Funciones generadoras en el superespacio. En esta sección presentamos las funciones generadores de las funciones simétricas dadas en las secciones 2.1, 2.2, 2.3 y 2.4. Dado un par de paramétros formales t y τ, las funciones generadoras son:

• La función generadora de las funciones simétricas elementales en el superespacio es dada por

$$E(t,\tau) = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + tx_i + \tau\theta_i).$$

• La función generadora de las funciones simétricas completas en el superespacio es dada por

$$H(t,\tau) = \prod_{i=1}^{\infty} \frac{1}{1 - tx_i - \tau\theta_i} = \sum_{n=0}^{\infty} t^n (e_n + \tau \tilde{e}_n).$$

• La función generadoras de las funciones de sumas de potencias en el superespacio es dada por

$$P(t,\tau) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{tx_i + \tau\theta_i}{1 - tx_i - \tau\theta_i}$$

• Podemos ver que, directamente de la definición, podemos obtener

$$H(t,\tau)E(-t,-\tau) = 1.$$

Luego en esta última igualdad, si expandimos las funciones generadoras en términos de $e_n, \tilde{e}_n, h_n$ y $\tilde{h}_n$ se pueden obtener los siguientes resultados: si $n \geq 1$, entonces

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r e_r h_{n-r} = 0$$

y si $n \geq 0$, entonces

$$\sum_{r=0}^{n} (-1)^r (e_r \tilde{h}_{n-r} - \tilde{e}_r h_{n-r}) = 0.$$

- También se puede comprobar directamente de la definición que

$$H(t,\tau)P(t,\tau) = (t\partial_t + \tau\partial_\tau)H(t,\tau)$$

y

$$E(t,\tau)P(-t,-\tau) = -(t\partial_t + \tau\partial_\tau)E(t,\tau).$$

Podemos extender estas últimas igualdades para obtener las siguientes fórmulas de recursión: Si $n \geq 1$, entonces

$$h_n = \sum_{r=1}^{n} p_r h_{n-r}, \quad ne_n = \sum_{r=1}^{n} (-1)^{r+1} p_r e_{n-r}.$$

y si $n \geq 0$, entonces

$$(n+1)\tilde{h}_n = \sum_{r=0}^{n} [p_r \tilde{h}_{n-r} + (r+1)\tilde{p}_r h_{n-r}],$$

y

$$(n+1)\tilde{e}_n = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{r+1} [p_r \tilde{e}_{n-r} - (r+1)\tilde{p}_r e_{n-r}].$$

2.6. Dualidad. El operador definido en la sección 2.7 puede ser extendido al superespacio. Se define el homomorfismo $\widehat{\omega}$ en $\mathbb{Q}[x;\theta]^{S_\infty}$ por las siguientes relaciones

$$\widehat{\omega} : e_n \longmapsto h_n \quad \text{y } \tilde{e}_n \longmapsto \tilde{h}_n.$$

Se puede probar que este homomorfismo es una involución, es decir, $\widehat{\omega}^2 = 1$. Equivalentemente

$$\widehat{\omega} : h_n \longmapsto e_n \quad \text{y} \quad \tilde{h}_n \longmapsto \tilde{e}_n.$$

Además haciendo cambio de base, podemos obtener la acción de $\widehat{\omega}$ en las sumas de potencias. Específicamente

$$\widehat{\omega}(p_n) = (-1)^{n-1} p_n \quad \text{y} \quad \widetilde{p}_{n-1} = (-1)^{n-1} \widetilde{p}_{n-1}.$$

Luego, si $\Lambda = (\Lambda_1, \dots, \Lambda_m; \Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_n)$, recordemos que $p_\Lambda = \widetilde{p}_{\Lambda_1} \cdots \widetilde{p}_{\Lambda_m} p_{\Lambda_{m+1}} \cdots \Lambda_n$ entonces podemos obtener que

$$\widehat{\omega}(p_\Lambda) = \omega_\Lambda p_\Lambda$$

donde $\omega_\Lambda = (-1)^{|\Lambda| + \overline{\Lambda} - l(\Lambda)}$.

2.7. Ortogonalidad. Sea $n_\lambda(i)$ el número de partes igual a i en la partición λ. Definimos el producto interno en $\mathbb{Q}[x;\theta]^{S_N}$ por

$$\langle\langle p_\Lambda | p_\Omega \rangle\rangle := z_\Lambda \delta_{\Lambda,\Omega}$$

donde $z_\Lambda := z_{\Lambda^s} = \prod_{k \geq 1} [k^{n_{\Lambda^s}(k)} n_{\Lambda^s}(k)!]$.

Proposición 12. *La involución $\widehat{\omega}$ es una isometría, es decir,*

$$\langle\langle \widehat{\omega}\, f \,|\, \widehat{\omega}\, g \rangle\rangle = \langle\langle\, f \,|\, g \,\rangle\rangle$$

para todo f y g funciones en $\mathbb{Q}[x;\theta]^{S_N}$.

El kernel $\Pi = \Pi(x,\theta;y,\phi)$ en el superespacio se define por

$$\Pi := \prod_{i,j} \frac{1}{1 - x_i y_j - \theta_i \phi_j}.$$

Se puede probar que

$$\Pi = \sum_{\Lambda \in SPar} z_\Lambda^{-1} p_\Lambda(x;\theta) p_\Lambda(y;\phi)$$

y

$$\langle\!\langle \Pi(x,\theta;y,\phi) | f(x,\theta) \rangle\!\rangle = f(y,\phi)$$

para todo f función simétrica en el superespacio.

Proposición 13. *Sean $\{u_\Lambda\}$ y $\{v_\Lambda\}$ dos bases de $\mathbb{Q}[x;\theta]^{S_\infty}$. Entonces las siguientes afirmaciones son equivalentes:*

(1) $\Pi(x,\theta;y,\phi) = \sum_\Lambda u_\Lambda(x,\theta) v_\Lambda(y,\phi)$.

(2) $\langle\!\langle u_\Lambda | v_\Lambda \rangle\!\rangle = \delta_{\Lambda,\Omega}$.

3. Polinomios de Macdonald en el superespacio

En [**8, 9**] se presentó una versión de los polinomios de Macdonald en el superespacio. Al igual que en el caso clásico, dependen de dos parámetros q y t, pero en este caso los polinomios de Macdonald están indexados por superparticiones. Usando estos polinomios de Macdonald en el superespacio, se pueden obtener versiones en el superespacio de los polinomios de Jack y de los polinomios de Hall-Littlewood. En el superespacio existen diferentes tipos de los polinomios de Schur. También nos referiremos a los polinomios de Macdonald en el superespacio como superpolinomios de Macdonald.

Sean q y t paramétros formales independientes. Consideramos $\mathbb{Q}(q,t)$ el cuerpo de funciones racionales en q y t. En este caso, una función $f \in \mathbb{Q}(q,t)[x;\theta]$ será simétrica en el superespacio o supersimétrica si

$$\mathcal{K}_\sigma f = f$$

donde $\mathcal{K}_\sigma$ es el intercambio simultáneo de las variables x y las variables θ al igual que en (34).

El algebra de los polinomios simétricos de N variables y grado fermiónico m en el cuerpo $\mathbb{Q}(q,t)$ en el superespacio será denotado por $\mathcal{R}(N|m)$. De esta forma denotamos por

$$\mathcal{R}(N) = \bigcup_{m=0}^{N} \mathcal{R}(n|m)$$

el algebra de polinomios simétricos con coeficientes en $\mathbb{Q}(q,t)$ de n variables y de cualquier grado fermiónico. También denotamos el algebrá de polinomios supersimétricos de un número arbitrario de variables y de todos los grados fermiónicos por $\mathcal{R}^{S_\infty}$.

Teorema 4. *Para cada Λ superpartición, existe un único $P_\Lambda = P_\Lambda(x,\theta;q,t)$ en $\mathcal{R}^{S_\infty}$ tal que*

$$\begin{array}{ll} 1) & P_\Lambda = m_\Lambda + \sum_{\Omega<\Lambda} g(q,t) m_\Omega, \\ 2) & \langle\!\langle P_\Lambda | P_\Omega \rangle\!\rangle_{q,t} = 0 \quad \textit{if} \quad \Lambda \neq \Omega, \end{array} \tag{37}$$

donde $g(q,t) \in \mathbb{Q}(q,t)$. *El producto escalar es definido por*

$$\langle\langle p_\Lambda | p_\Omega \rangle\rangle_{q,t} = (-1)^{\binom{m}{2}}\, z_\Lambda(q,t)\delta_{\Lambda\Omega}\,, \tag{38}$$

donde

$$z_\Lambda(q,t) = z_{\Lambda^s}\, q^{|\Lambda^a|} \prod_{i=1}^{\ell(\Lambda^s)} \frac{1-q^{\Lambda_i^s}}{1-t^{\Lambda_i^s}}\,. \tag{39}$$

La existencia de estos polinomios fue demostrada en [**9**] y para ello se utilizaron los polinomios de Macdonald no simétricos [**4**], en este sentido para Λ considera el polinomio

$$P_\Lambda = \frac{(-1)^{\binom{m}{2}}}{f_{\Lambda^s}(t)\, t^{\mathrm{inv}(\Lambda^s)}} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_{m^c})} \mathcal{K}_\sigma \theta_1 \cdots \theta_m A_m U_{m^c}^{+} E_{\Lambda^R}\,, \tag{40}$$

Y se puede demostrar que P_Λ satisface las condiciones del Teorema 4.

3.1. Operadores E_1 y E_2 en el superespacio. De la misma forma que en sección 3.1, se pueden caracterizar los superpolinomios de Macdonald como funciones propias. En este caso tenemos dos tipos de operadores para el cuál los superpolinomios de Macdonald son funciones propias de ciertos operadores. Estos operadores son complejos, ya que involucran operadores de Cherednik (Ver Apéndice A). Estos operadores podrían tener una forma más simplificada para los polinomios simétricos, pero esto aún no se ha realizado.

La definición de los operadores de Cherednik Y_i es dada explícitamente en (211), por lo que no queremos repetir la definición en esta sección. Definimos

$$\triangle_N^t = \prod_{1 \le i < j \le N} (tx_i - x_j), \quad \text{y} \quad \triangle_N = \triangle_N^1.$$

De esta manera definimos

$$D_1^{N^*} = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_m^c)} \mathcal{K}_\sigma \left(\frac{\triangle_m}{\triangle_m^t} \prod_{i=1}^{N} (Y_1 + \cdots + Y_N) \frac{\triangle_m^t}{\triangle_m} \pi_{1,\ldots,m} \right)$$

y

$$D_1^{N\circledast}(u;q,t) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_m^c)} \mathcal{K}_\sigma \left(\frac{\triangle_m}{\triangle_m^t} (qY_1 + \cdots + qY_m + Y_{m+1} + \cdots + Y_N) \frac{\triangle_m^t}{\triangle_m} \pi_{1,\ldots,m} \right)$$

donde el operador $\pi_{1,\ldots,m}$ es el operador de proyección definido como

$$\pi_{1,\ldots,m} = \prod_{i=1}^{m} \theta_i \partial_{\theta_i} \prod_{j=m+1}^{N} \partial_{\theta_j} \theta_j.$$

El operador ∂_{θ_i} es la derivada parcial sobre θ_i. Sea $f = f(x,\theta)$ y $i,j \in \{1,\ldots,N\}$, se pueden verificar las siguientes propiedades

$$\begin{aligned} \partial_{\theta_i}(x_j f) &= x_j \partial_{\theta_i}(f) \\ \partial_{\theta_i}(\theta_j f) &= \delta_{i,j} f - \theta_j \partial_{\theta_i}(f) \\ \partial_{\theta_i}\partial_{\theta_j}(f) &= -\partial_{\theta_j}\partial_{\theta_i}(f). \end{aligned}$$

Por lo última igualdad, se tiene que $\partial_{\theta_i}^2(f) = 0$. También vemos que el operador de proyección satisface que

$$\pi_{1,\dots,m}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k} = \begin{cases} \theta_1\cdots\theta_m, & \text{si } \{i_1,\dots,i_k\} = \{1,\dots,m\} \\ 0, & \text{si } \{i_1,\dots,i_k\} \neq \{1,\dots,m\} \end{cases}$$

Proposición 14. *Los superpolinomios de Macdonald son funciones propias de los operadores D_1^* y $D_1^{\circledast}$. Explícitamente*

$$D_1^* P_\Lambda = \varepsilon_{\Lambda^*} P_\Lambda \quad y \quad D_1^{\circledast} P_\Lambda = \varepsilon_{\Lambda^{\circledast}} P_\Lambda,$$

donde el valor propio es dado por $\varepsilon_\lambda = \sum_i q^{\lambda_i} t^{i-1}$.

Los operadores D_1^* y $D_1^{\circledast}$ no son compatibles con el número de variables, por lo que para poder tener operadores que sean compatibles con el número de variables, se hace una modificación. Definimos

$$\mathcal{O}_1 := \frac{1}{1-q}(D_1^* - D_1^{\circledast}) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_m^c)} \mathcal{K}_\sigma \left(\frac{\triangle_m}{\triangle_m^t}(Y_1 + \cdots + Y_m) \frac{\triangle_m^t}{\triangle_m} \pi_{1,\dots,m} \right)$$

y

$$\mathcal{O}_2 := \frac{1}{q-1}(qD_1^* - D_1^{\circledast}) = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_m^c)} \mathcal{K}_\sigma \left(\frac{\triangle_m}{\triangle_m^t}(Y_{m+1} + \cdots + Y_N) \frac{\triangle_m^t}{\triangle_m} \pi_{1,\dots,m} \right).$$

Utilizando la Proposición 14 y las definiciones anteriores, se puede probar

$$\mathcal{O}_1 P_\Lambda = \frac{1}{q-1} \left[\sum_{i=1}^{N} (q^{\Lambda_i^{\circledast}} - q^{\Lambda_i^*}) t^{1-i} \right] P_\Lambda$$

y

$$\mathcal{O}_2 P_\Lambda = \frac{1}{q-1} \left[\sum_{i=1}^{N} (q^{\Lambda_i^*+1} - q^{\Lambda_i^{\circledast}}) t^{1-i} \right] P_\Lambda.$$

Ahora definimos

$$\overline{\mathcal{O}}_1 = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_{m^c})} \mathcal{K}_\sigma \left(\frac{\triangle_m}{\triangle_m^t}(Y_1^{-1} + \cdots + Y_m^{-1}) \frac{\triangle_m^t}{\triangle_m} \pi_{1,\dots,m} \right),$$

donde Y_i^{-1} es el inverso del operador de Cherednik. Debido a lo anterior, los superpolinomios de Macdonald son funciones propias de $\overline{\mathcal{O}}_1$, explícitamente

$$\overline{\mathcal{O}}_1 P_\Lambda = \frac{1}{1/q-1} \left[\sum_{i=1}^{N} (q^{-\Lambda_i^{\circledast}} - q^{-\Lambda_i^*}) t^{i-1} \right] P_\Lambda.$$

Se define $E_{1,N} = \overline{\mathcal{O}}_1$ y $E_{2,N} = \mathcal{O}_2 - \sum_{i=1}^{N} t^{1-i}$, los cuales son compatibles con el número de variables. De esta manera definimos

$$E_1 = \varprojlim E_{1,N} \quad \text{y} \quad E_2 = \varprojlim E_{2,N}.$$

Con estos operadores, se pueden caracterizar los superpolinomios de Macdonald P_Λ con la siguiente proposición.

Proposición 15. *El polinomio de Macdonald P_Λ es el único polinomio en $\mathcal{R}^{S_\infty}$ tal que satisface:*

(1) $P_\Lambda = m_\Lambda + \sum_{\Omega<\Lambda} v_{\Lambda\Omega} m_\Omega$.

(2) $$E_1 P_\Lambda = \left(\sum_{\substack{i \\ \Lambda_i^{\circledast} \neq \Lambda_i^*}} q^{-\Lambda_i^*} t^{i-1} \right) P_\Lambda \quad y \quad E_2 P_\Lambda = \left(\sum_{\substack{i \\ \Lambda_i^{\circledast} = \Lambda_i^*}} (q^{\Lambda_i^* - 1}) t^{1-i} \right) P_\Lambda.$$

3.2. Kernel y Ortogonalidad. Sean $x = (x_1, x_2, \ldots)$ y $y = (y_1, y_2, \ldots)$ dos conjuntos de variables conmutantes, y sea $\theta = (\theta_1, \theta_2, \ldots)$ y sea $\phi = (\phi_1, \phi_2, \ldots)$ dos conjuntos de variables anticonmutantes. Definimos el Kernel por

$$K(x,\theta;y,\phi) = \prod_{i,j} \frac{(tx_i y_j; q)_\infty}{(x_i y_j; q)_\infty} \left(1 + \frac{\theta_i \phi_j}{1 - q^{-1} x_i y_j} \right)$$

donde

$$(a;q)_\infty = \prod_{k=0}^{\infty} (1 - aq^k).$$

Se puede notar que el Kernel puede ser escrito por

$$K(x,\theta;y,\phi) = K^0(x,\theta;y,\phi) \prod_{i,j} \left(1 + \frac{\theta_i \phi_j}{1 - q^{-1} x_i y_j} \right)$$

donde $K^0(x,\theta;y,\phi) = \prod_{i,j} \frac{(tx_i y_j;q)_\infty}{(x_i y_j;q)_\infty}$ es el Kernel usual en la Sección 3.3. No es difícil de probar que

$$K(x,\theta;y,\phi) = \sum_\Lambda (-1)^{\binom{m}{2}} z_\Lambda(q,t)^{-1} p_\Lambda(x,\theta) p_\Lambda(y,\phi),$$

donde $z_\Lambda(q,t)$ está definido en (45). Las siguientes proposiciones son análogas de las proposiciones dadas en 9.

Proposición 16. *Para cada n, m, sean $\{u_\Lambda\}$ y $\{v_\Lambda\}$ bases, donde . Entonces las siguientes condiciones son equivalentes:*

$$\begin{array}{lll} (1) & \langle\langle u_\Lambda | v_\Omega \rangle\rangle_{q,t} = \delta_{\Lambda\Omega} & \textit{para todos los } \Lambda \textit{ y } \Omega \\ (2) & K(x,\theta;y,\phi) = \sum_\Lambda u_\Lambda(x,\theta) v_\Lambda(y,\phi). & \end{array} \tag{41}$$

3.3. Dualidad. En la sección 2.6 se dio una extensión del homomorfismo de los polinomios simétricos al superespacio. En esta sección vemos el homomorfismo considerando las parámetros q, t, el cual será denotado por $\Omega_{q,t}$ y para definirlo primero definimos los homomorfismos $\omega_{q,t}$ y $\tilde{\omega}_q$.

Sean p_r y $\tilde{p}_r$ los polinomios sumas de potencias en el superespacio. Se define

$$\omega_{q,t}\, p_r = (-1)^{r-1} \frac{1-q^r}{1-t^r} p_r \quad \text{y} \quad \omega_{q,t}\, \tilde{p}_r.$$

y

$$\tilde{\omega}_q p_r = p_r \quad \text{y} \quad \tilde{\omega}_q \tilde{p}_r = q^r \tilde{p}_r.$$

El homomorfismo $\Omega_{q,t}$ se define por

$$\Omega_{q,t} := \tilde{\omega}_q \circ \omega_{q,t}.$$

De esta manera, tenemos

$$\Omega_{q,t} p_\Lambda = \omega_\Lambda q^{|\Lambda^a|} \prod_{i=1}^{l(\Lambda^s)} \frac{1 - q^{\Lambda_i^s}}{1 - t^{\Lambda_i^s}}$$

donde $\omega_\Lambda = (-1)^{|\Lambda| - l(\Lambda^s)}$. El homomorfismo $\Omega_{q,t}$ satisface la siguiente propiedad de dualidad en los superpolinomios de Macdonald.

Teorema 5. *Se define $Q_\Lambda(q,t) := b_\Lambda(q,t)^{-1} P_\Lambda(q,t)$, donde $b_\Lambda(q,t) = \langle\!\langle P_\Lambda(q,t) | P_\Lambda(q,t) \rangle\!\rangle_{q,t}$. De esta forma el operador $\Omega_{q,t}$ áctua en un superpolinomio de Macdonald de la siguiente manera:*

$$\Omega_{q,t} P_\Lambda(q,t) = (qt^{-1})^{|\Lambda|} Q_{\Lambda'}(q,t).$$

3.4. Evaluación. Una evaluación en el superespacio es dada en [**8**]. Además en este artículo se dio una conjetura para esta evaluación de un polinomio de Macdonald en el superespacio. La evaluación es un homomorfismo que a cada superpolinomio le asigna un elemento de $\mathbb{Q}(q,t)$, este elemento depende de la especialización de las variables bosónicas del superpolinomio. Esta fórmula explícita nos ayuda a obtener diversas propiedades combinatoriales como la norma. En el siguiente capítulo demostramos las conjeturas dadas en [**8**] referentes a la norma y evaluación, pero con una evaluación un poco mas general que la presentada en la presente sección.

Sea $F(x,\theta)$ un polinomio en el superespacio de grado fermiónico m y supongamos $N \geq m$. La evaluación de $F(x;\theta)$ se define como

$$E_{N,m}[F(x,\theta)] := \left[\frac{\partial_{\theta_m} \cdots \partial_{\theta_1} F(x,\theta)}{V_m(x)} \right]_{x_1 = u_1, \cdots, x_N = u_N} \tag{42}$$

donde los valores de la especialización u_i son dados por

$$u_i = \frac{t^{i-1}}{q^{\max(m-i,0)}}$$

y

$$V_m(x) = \prod_{1 \leq i < j \leq m} (x_i - x_j)$$

es el determinante de Vandermonde en las variables $x_1, \ldots, x_m$. Notemos que la especialización de las variables dadas en (42) es la siguiente: para las primeras m variables

$$x_1 = \frac{1}{q^{m-1}},\ x_2 = \frac{t}{q^{m-2}},\ \ldots,\ x_{m-1} = \frac{t^{m-2}}{q},\ x_m = t^{m-1},$$

y la especialización de las variables $x_{m+1}, \ldots, x_N$ es dada por

$$x_{m+1} = t^m, x_{m+2} = t^{m+1}, \ldots, x_{N-1} = t^{N-2}, x_N = t^{N-1}.$$

La conjetura de la fórmula de la evaluación en un superpolinomio de Macdonald involucra un número combinatorial ζ_Λ que se define como sigue: en cada caja fermiónica de Λ escribimos el número de cuadrados bosónicos que hay hacia arriba; el número ζ_Λ es obtenido por sumar esos números. Recordamos que una caja fermiónica es una caja que pertenece a una fila con un círculo y una caja bosónica es una caja que pertenece a una fila que no posee círculo.

Consideramos una partición Λ de grado fermiónico m, definimos $\mathcal{S}\Lambda = \Lambda^{\circledast}/\delta^{(m+1)}$, donde $\delta^{(m)}$ es la partición escalera $(m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$, y la cantidad $n(\lambda) = \sum_i (i-1)\lambda_i$ para una particón λ. También definimos $n(\lambda/\mu) = n(\lambda) - n(\mu)$.

A continuación se presentan las fórmula de largo-brazo y largo-pierna para superparticiones.

Fórmulas de largo-brazo y largo-pierna. Para una caja $s = (i, j) \in \Lambda$, introducimos las siguientes fórmulas de largo-brazo y largo-pierna:

$$a_\Lambda(s) = \Lambda_i^* - j, \qquad \widetilde{a}_\Lambda(s) = \Lambda_i^{\circledast} - j$$
$$l_\Lambda(s) = (\Lambda^*)'_j - i \qquad \widetilde{l}_\Lambda(s) = (\Lambda^{\circledast})'_j - i$$

donde $(\Lambda^*)'$ y $(\Lambda^{\circledast})'$ son las particiones conjugadas de Λ^* y $\Lambda^{\circledast}$ respectivamente. Definimos

$$w_\Lambda(q,t) = \prod_{s \in \mathcal{B}(\Lambda)} (1 - q^{a_\Lambda(s)+1} t^{\widetilde{l}_\Lambda(s)}),$$

donde $\mathcal{B}(\Lambda)$ denota el conjunto de cajas en el diagrama de Λ que no están al mismo tiempo en una fila conteniendo un círculo y en una columna conteniendo un círculo.

Se define la forma entera de un superpolinomio de Macdonald por

$$J_\Lambda(x, \theta; q, t) := w_{\Lambda'}(t, q) P_\Lambda.$$

Se conjetura en [**8**] que los coeficientes de los monomiales que resultan al expandir J_Λ son polinomios en q y t con coeficientes enteros.

La conjetura de la fórmula de la evaluación para $J_\Lambda(x, \theta; q, t)$ es dada en [**8**] y lo anotamos como teorema ya que es demostrado en el siguiente capítulo.

Teorema 6. *Sea Λ una superpartición de grado fermiónico m y supongamos que $N \geq l(\Lambda^{\circledast})$. Entonces la fórmula de evaluación para el superpolinomio de Macdonald J_Λ es dada por*

$$E_{N,m}[J_\Lambda(x, \theta; q, t)] = \frac{t^{\zeta_\Lambda} t^{n(\mathcal{S}\Lambda)}}{q^{(m-1)|\Lambda^a/\delta^{(m)}| - n(\Lambda^a/\delta^{(m)})}} \prod_{(i,j) \in \mathcal{S}\Lambda} \left(1 - q^{j-1} t^{N-(i-1)}\right).$$

Algunos ejemplos de esta fórmula se pueden encontrar en el Apéndice 1.

3.5. Norma. Dado el producto escalar definido en (38) se define la norma de un superpolinomio $f := f(x, \theta)$ de grado fermiónico m por

$$\|f\|_{q,t}^2 = (-1)^{\binom{m}{2}} \langle\langle f \,|\, f \rangle\rangle_{q,t}.$$

En [**8**] se da una conjetura para la fórmula combinatorial de la norma de un superpolinomio de Macdonald. Esta conjetura será demostrada en el siguiente capítulo y más abajo lo anotamos como teorema. Algunos ejemplos de esta fórmula son dados en Apéndice 1.

Teorema 7. *Sea $P_\Lambda(x, \theta; q, t)$ un superpolinomio de Macdonald. Su norma es dada por*

$$||P_\Lambda||^2 = q^{|\Lambda^a|} \frac{w_\Lambda(q,t)}{w_{\Lambda'}(t,q)}.$$

CHAPTER 3

Evaluation and Norm of Macdonald polynomials in superspace

Este capítulo corresponde a uno de los artículo que obtuvimos como resultado de esta tesis, espécificamente se encuentran las demostraciones de las fórmulas de la evaluación y la norma dadas en los teoremas 6 y 7. En este momento éste artículo se encuentra sometido y bajo revisión. La sección correspondiente a los polinomios de Macdonald no-simétricos, además de los ejemplos fueron separados de este capítulo y se colocaron en los apéndices.

1. Introduction

An extension to superspace of the Macdonald polynomials was presented in [**8, 9**]. In this setting, the polynomials not only depend on the usual commuting variables $x_1, x_2, \dots$ but also on anticommuting variables $\theta_1, \theta_2, \dots$. Just as is the case for the usual Macdonald polynomials, the Macdonald polynomials in superspace can be characterized by conditions of triangularity and orthogonality (we refer to Chapter 2 for the relevant definitions and to Apéndice A for nonsymmetric Macdonald polynomials):

Theorem 2 ([**9**]). *Given a superpartition $\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s)$ of fermionic degree m, there is a unique symmetric superpolynomial $P_\Lambda = P_\Lambda(x, \theta; q, t)$, with $x = (x_1, x_2, \dots)$ and $\theta = (\theta_1, \theta_2, \dots)$, such that:*

$$\begin{array}{ll} 1) & P_\Lambda = m_\Lambda + \sum_{\Omega < \Lambda} g(q,t) m_\Omega, \\ 2) & \langle\!\langle P_\Lambda | P_\Omega \rangle\!\rangle_{q,t} = 0 \quad \mathit{if} \quad \Lambda \neq \Omega, \end{array} \tag{43}$$

where $g(q,t)$ is a rational function in q and t. The dominance ordering on superpartitions is defined in (36). *The scalar product is defined by*

$$\langle\!\langle p_\Lambda | p_\Omega \rangle\!\rangle_{q,t} = (-1)^{\binom{m}{2}} z_\Lambda(q,t) \delta_{\Lambda\Omega}\,, \tag{44}$$

where

$$z_\Lambda(q,t) = z_{\Lambda^s}\, q^{|\Lambda^a|} \prod_{i=1}^{\ell(\Lambda^s)} \frac{1 - q^{\Lambda_i^s}}{1 - t^{\Lambda_i^s}}\,. \tag{45}$$

Most of the important properties of Macdonald polynomials seem to extend to superspace: explicit formulas for the norm and the evaluation were conjectured in [**8**], Pieri rules connected to the 6-vertex model were conjectured in [**10**], and most remarkably, a Macdonald positivity conjecture was stated in [**9**]. The existence of the Macdonald polynomials in superspace is given by using the non-symmetric Macdonald polynomials (see Appendix A). We define a Macdonald superpolynomial in terms of the non-symmetric Macdonald polynomials (it was proven in [**9**] that they correspond to those of Theorem 2):

DEFINITION 1. *The Macdonald superpolynomials $P_\Lambda = P_\Lambda(x,\theta;q,t)$ are defined as*

$$P_\Lambda = \frac{(-1)^{\binom{m}{2}}}{f_{\Lambda^s}(t)\, t^{\mathrm{inv}(\Lambda^s)}} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_{m^c})} \mathcal{K}_\sigma \theta_1 \cdots \theta_m A_m U^+_{m^c} E_{\Lambda^R}\,, \tag{46}$$

where

$$f_{\Lambda^s}(t) = \prod_{j \geq 0} [n_{\Lambda^s}(j)]_t!\,, \tag{47}$$

with $n_{\Lambda^s}(j)$ being the number of occurrences of j in Λ^s and Λ^R stands for the concatenation of Λ^a and Λ^s read in reverse order:

$$\Lambda^R = (\Lambda_m, \ldots, \Lambda_1, \Lambda_N, \ldots, \Lambda_{m+1})\,. \tag{48}$$

In (46), we extended the usual concept of inversion on a permutation to a partition: $\mathrm{inv}(\Lambda^s)$ is the number of inversions in Λ^s, the latter number being equal to

$$\mathrm{inv}(\lambda) = \#\{n \geq i > j \,|\, \lambda_i < \lambda_j\}\,, \tag{49}$$

where n is the number of entries in λ (including 0's). For instance, we have $\mathrm{inv}(22100) = 8$. In (47), we also used the following standard notation:

$$[k]_t! = [1]_t[2]_t \cdots [k]_t \qquad \text{with} \qquad [m]_t = (1-t^m)/(1-t)\,.$$

We first show that the stability of E_η with respect to the number of variables can be lifted to that of P_Λ.

PROPOSITION 1. *Suppose that $N > m$. Then the Macdonald superpolynomials P_Λ are stable with respect the number of variables, that is,*

$$P_\Lambda(x_1,\ldots,x_{N-1},0,\theta_1,\ldots,\theta_{N-1},0) = \begin{cases} P_{\Lambda_-}(x_1,\ldots,x_{N-1},\theta_1,\ldots,\theta_{N-1}) & \text{if } \Lambda_N = 0\,, \\ 0 & \text{if } \Lambda_N \neq 0\,, \end{cases} \tag{50}$$

where $\Lambda_- = (\Lambda_1,\ldots,\Lambda_m;\Lambda_{m+1},\ldots,\Lambda_{N-1})$.

We now provide a characterization of the P_Λ's as common eigenfuntions of two commuting operators:

$$D_1^* = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_{m^c})} \mathcal{K}_\sigma \left(\frac{\Delta_m}{\Delta_m^t} (Y_1 + \cdots + Y_N) \frac{\Delta_m^t}{\Delta_m} \pi_{1,\ldots,m} \right), \tag{51}$$

$$D_1^{\circledast} = \sum_{m=0}^{N} \sum_{\sigma \in S_N/(S_m \times S_{m^c})} \mathcal{K}_\sigma \left(\frac{\Delta_m}{\Delta_m^t} (qY_1 + \cdots + qY_m + Y_{m+1} + \cdots + Y_N) \frac{\Delta_m^t}{\Delta_m} \pi_{1,\ldots,m} \right). \tag{52}$$

where the operator $\pi_{1,\ldots,m}$ is the projection operator defined as

$$\pi_{1,\ldots,m} = \prod_{i=1}^{m} \theta_i \partial_{\theta_i} \prod_{j=m+1}^{N} \partial_{\theta_j} \theta_j\,. \tag{53}$$

In this equation, ∂_{θ_i} denotes the standard derivative with respect to the Grassmann variable θ_i, which is a linear operator such that, for all polynomials $f = f(x,\theta)$ and $i,j \in \{1,\ldots,N\}$,

$$\partial_{\theta_i}(x_j f) = x_j \partial_{\theta_i}(f) \qquad \partial_{\theta_i}(\theta_j f) = \delta_{i,j}\, f - \theta_j\, \partial_{\theta_i}(f)\,, \tag{54}$$

and

$$\partial_{\theta_i}\partial_{\theta_j}(f) = -\partial_{\theta_j}\partial_{\theta_i}(f) \quad \Longrightarrow \quad \partial^2_{\theta_i}(f) = 0\,. \tag{55}$$

It is easy to see that

$$\pi_{1,\ldots,m}\theta_{i_1}\cdots\theta_{i_k} = \begin{cases} \theta_1\cdots\theta_m & \text{if } \{i_1,\ldots,i_k\} = \{1,\ldots,m\}\,, \\ 0 & \text{if } \{i_1,\ldots,i_k\} \neq \{1,\ldots,m\}. \end{cases} \tag{56}$$

The eigenvalues of the operators D_1^* and $D_1^{\circledast}$ when acting on P_Λ are

$$D_1^* P_\Lambda = \varepsilon_{\Lambda^*} P_\Lambda \qquad \text{and} \qquad D_1^{\circledast} P_\Lambda = \varepsilon_{\Lambda^{\circledast}} P_\Lambda, \tag{57}$$

where $\varepsilon_\lambda = \sum_{i=1}^N q^{\lambda_i} t^{1-i}$. Since the two eigenvalues completely determine Λ, the following lemma holds.

Lemma 1. *The Macdonald polynomial in superspace P_Λ can be characterized as the unique common eigenfuntion of D_1^* and $D_1^{\circledast}$ with eigenvalues ε_{Λ^*} and $\varepsilon_{\Lambda^{\circledast}}$ respectively.*

We now state the generalization to superspace of the standard duality property that relates the Macdonald symmetric functions $P_\lambda(q,t)$ and $P_{\lambda'}(t,q)$ [**1**, Section VI.5]. Let $\Omega_{q,t}$ be the homomorphism defined as

$$\Omega_{q,t} p_r = (-1)^{r-1}\frac{1-q^r}{1-t^r}\, p_r \qquad \Omega_{q,t}\tilde{p}_r = (-q)^r \tilde{p}_r\,, \tag{58}$$

which is such that

$$\Omega_{q,t}\, p_\Lambda = (-1)^{|\Lambda|-\ell(\Lambda^s)} q^{|\Lambda^a|} \prod_{i=1}^{\ell(\Lambda^s)} \frac{1-q^{\Lambda_i^s}}{1-t^{\Lambda_i^s}}\, p_\Lambda, \tag{59}$$

Theorem 3. *Let $Q_\Lambda = P_\Lambda/\|P_\Lambda\|^2$, where $\|P_\Lambda\|^2 = \langle\!\langle P_\Lambda | P_\Lambda \rangle\!\rangle_{q,t}$. Then, the following duality holds*[1]*:*

$$\Omega_{q,t} P_\Lambda(q,t) = (-1)^{\binom{m}{2}} (qt^{-1})^{|\Lambda|}\, Q_{\Lambda'}(t^{-1}, q^{-1}). \tag{60}$$

The above results were proved in [**9**], the rest of this chapter is dedicated to give explicit formulas for the norm and the evaluation of Macdonald superpolynomials.

2. Skew Macdonald polynomials in superspace

We define the coefficients $g^\Lambda_{\Omega,\Gamma}$ by

$$P_\Omega\, P_\Gamma = \sum_\Lambda \frac{1}{\|P_\Lambda\|^2}\, g^\Lambda_{\Omega,\Gamma}\, P_\Lambda. \tag{61}$$

By orthogonality, this is equivalent to saying that

$$g^\Lambda_{\Omega,\Gamma} = \langle\!\langle P_\Lambda | P_\Omega P_\Gamma \rangle\!\rangle. \tag{62}$$

The skew Macdonald polynomial $P_{\Lambda/\Omega}$ is now defined as the unique symmetric superfunction in x and θ such that

$$g^\Lambda_{\Omega\Gamma} = \langle\!\langle P_{\Lambda/\Omega} \,|\, P_\Gamma \rangle\!\rangle = \langle\!\langle P_\Lambda | P_\Omega P_\Gamma \rangle\!\rangle\,. \tag{63}$$

---

[1]The corresponding formula in [**9**] does not have the sign $(-1)^{\binom{m}{2}}$. This is due to the fact that our choice of scalar product differs from theirs by $(-1)^{\binom{m}{2}}$.

Observe that this definition is equivalent to

$$P_{\Lambda/\Omega} = \sum_{\Gamma} \frac{g^{\Lambda}_{\Omega\Gamma}}{\|P_\Gamma\|^2} P_\Gamma \,. \tag{64}$$

The following proposition is proved exactly as in the case of the Jack polynomials in superspace.

Proposition 2. *Let $(x, y; \theta, \phi)$ denote the ordered set $(x_1, x_2, \ldots, y_1, y_2, \ldots; \theta_1, \theta_2, \ldots, \phi_1, \phi_2, \ldots)$. Then, we have*

$$P_\Gamma(x, y; \theta, \phi) = \sum_\Lambda \frac{1}{\|P_\Lambda\|^2} P_\Lambda(x;\theta) P_{\Gamma/\Lambda}(y;\phi) = \sum_\Lambda \frac{1}{\|P_\Lambda\|^2} P_{\Gamma/\Lambda}(x;\theta) P_\Lambda(y;\phi). \tag{65}$$

The following lemma is an immediate consequence of the duality induced by $\Omega_{q,t}$ stated in Theorem 3.

Lemma 2. *We have that*

$$g^{\Lambda}_{\Omega\Gamma} \neq 0 \quad \textit{if and only if} \quad g^{\Lambda'}_{\Omega'\Gamma'} \neq 0. \tag{66}$$

2.1. Necessary conditions for the non-vanishing of coefficients in the Pieri rule: horizontal and vertical strips. Let n and $\tilde{n}$ refer respectively to the superpartitions (n) and $(n;)$, i.e., associated respectively to the following diagrams both containing n squares:

$$n = \square\square\cdots\ \square \quad \text{and} \quad \tilde{n} = \square\square\cdots\ \square\bigcirc. \tag{67}$$

We now obtain necessary conditions for the non-vanishing of the coefficients $g^{\Lambda}_{\Omega,n}$ and $g^{\Lambda}_{\Omega,\tilde{n}}$. These results specify – without evaluating them explicitly – the coefficients that can appear in a Pieri-type rule for Jack polynomials in superspace.

When no fermions are involved (in which case superpartitions Λ and Ω are usual partitions λ and μ), it is known that the coefficient $g^{\lambda}_{\mu,n} \neq 0$ if and only if λ/μ is a horizontal n-strip. The concept of horizontal or vertical strip can be easily generalized to superpartitions.

Definition 2. *We say that Λ/Ω is a horizontal n-strip if Λ^*/Ω^* and $\Lambda^{\circledast}/\Omega^{\circledast}$ are both horizontal n-strips. Similarly, we say that Λ/Ω is a horizontal $\tilde{n}$-strip if Λ^*/Ω^* is a horizontal n-strip and $\Lambda^{\circledast}/\Omega^{\circledast}$ is a horizontal $n+1$-strip. The definitions are similar for vertical strips.*

Consider for example, $\Lambda = (4, 1; 2, 1)$ and $\Omega = (2, 0; 3, 1)$. Then, as illustrated in Figure 1, Λ/Ω is a horizontal 3-strip, but it is not a vertical 3-strip. Similarly, it is readily seen from Figure 2 that $(3, 0; 2, 1)/(2; 2)$ is a vertical $\tilde{2}$-strip.

Figure 1. Horizontal n-strip

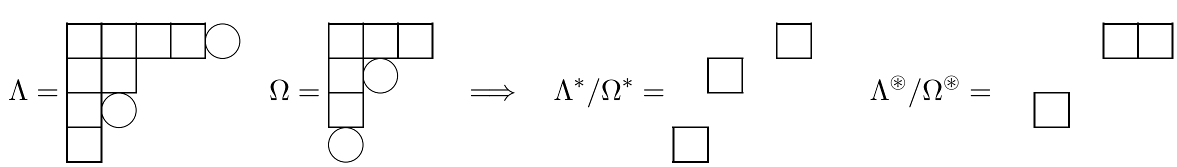
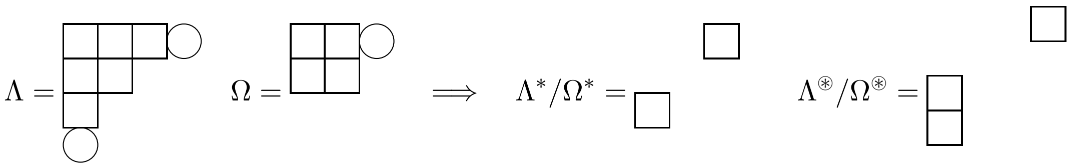


Figure 2. Vertical $\tilde{n}$-strip



The proofs of the next two propositions rely are rather involved. As such, they are relegated to Appendix 2. Note that the equivalences in the statements follow from Lemma 2.

Proposition 3. *The coefficient* $g^{\Lambda}_{\Omega,n} \neq 0$ *only if* Λ/Ω *is a horizontal* n*-strip. Equivalently, the coefficient* $g^{\Lambda}_{\Omega,1^n} \neq 0$ *only if* Λ/Ω *is a vertical* n*-strip*

Proposition 4. *The coefficient* $g^{\Lambda}_{\Omega,\tilde{n}} \neq 0$ *only if* Λ/Ω *is a horizontal* $\tilde{n}$*-strip. Equivalently, the coefficient* $g^{\Lambda}_{\Omega,(0;1^n)} \neq 0$ *only if* Λ/Ω *is a vertical* $\tilde{n}$*-strip*

Recall that the diagram μ is contained in λ, denoted $\mu \subseteq \lambda$, if $\mu_i \leq \lambda_i$ for all i. For superpartitions we define $\Omega \subseteq \Lambda$ as follows:

$$\Omega \subseteq \Lambda \quad \text{if and only if} \quad \Omega^* \subseteq \Lambda^* \quad \text{and} \quad \Omega^{\circledast} \subseteq \Lambda^{\circledast}\,. \tag{68}$$

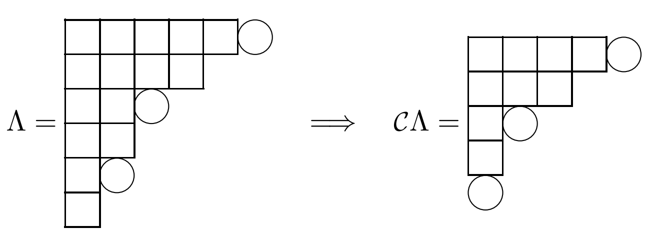
For instance, $(0;3,2) \subset (3,0;3,1)$ but $(2,1;3) \not\subseteq (3,0;3,1)$. Since $P_{(\emptyset;1^n)} = e_n$ and $P_{(0;1^n)} = \tilde{e}_n$ and since the e_Λ's form a multiplicative basis, the previous propositions have the following corollary.

Corollary 1. *We have that* $g^{\Lambda}_{\Omega\Gamma}$ *is zero unless* $\Omega \subseteq \Lambda$ *and* $\Gamma \subseteq \Lambda$.

3. Operations on the first column

We define two operations on the first column of a superpartition Λ of fermionic degree m. If the first column in the diagram of Λ does not contain a circle (that is, if $\Lambda_m \neq 0$), then we let $\mathcal{C}\Lambda$ be the superpartition whose diagram is that of Λ without its first column.

Figure 3. Operation $\mathcal{C}$



If the first column in the diagram of Λ contains a circle (that is, if $\Lambda_m = 0$), then we let $\tilde{\mathcal{C}}\Lambda$ be the superpartition whose diagram is that of Λ without the circle in the first column.

In this manner, we have that if the first column in the diagram of Λ contains a circle, then $\mathcal{C}\tilde{\mathcal{C}}\Lambda$ is the superpartition whose diagram is that of Λ without its first column.

FIGURE 4. Operation $\tilde{\mathcal{C}}$

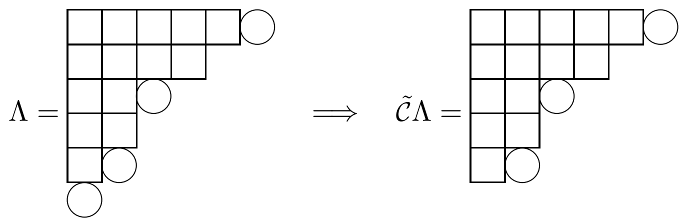
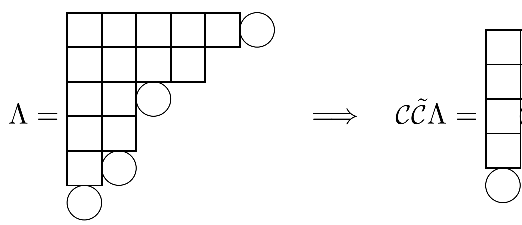


FIGURE 5. Operation $\mathcal{C}\tilde{\mathcal{C}}$



PROPOSITION 5. *Let Λ be a superpartition whose diagram does not contain a circle in the first column. Then*

$$P_\Lambda(x_1,\dots,x_\ell;\theta_1,\dots,\theta_\ell) = x_1\cdots x_\ell P_{\mathcal{C}\Lambda}(x_1,\dots,x_\ell;\theta_1,\dots,\theta_\ell)$$

where $\ell = \ell(\Lambda) = \ell(\Lambda^*)$.

PROOF. From Lemma 1, it suffices to show that $x_1\cdots x_\ell P_{\mathcal{C}\Lambda}(x_1,\dots,x_\ell;\theta_1,\dots,\theta_\ell)$ is an eigenfunction of D_1^* and $D_1^{\circledast}$ with eigenvalues ε_{Λ^*} and $\varepsilon_{\Lambda^{\circledast}}$ respectively.

It is easy to show that

$$T_i\, x_1\cdots x_\ell = x_1\cdots x_\ell\, T_i \qquad \text{for } i=1,\dots,\ell-1 \tag{69}$$

(and similarly for T_i^{-1}). Hence, in $N=\ell$ variables, we have

$$Y_i\, x_1\cdots x_\ell = q\, x_1\cdots x_\ell\, Y_i \qquad \text{for } i=1,\dots,\ell-1 \tag{70}$$

From the definition of D_1^* and $D_1^{\circledast}$, it is then immediate that in $N=\ell$ variables we also have

$$D_1^*\, x_1\cdots x_\ell = q\, x_1\cdots x_\ell\, D_1^* \qquad \text{and} \qquad D_1^{\circledast}\, x_1\cdots x_\ell = q\, x_1\cdots x_\ell\, D_1^{\circledast} \tag{71}$$

Therefore,

$$D_1^*\,(x_1\cdots x_\ell P_{\mathcal{C}\Lambda}) = q\, x_1\cdots x_\ell D_1^* P_{\mathcal{C}\Lambda} = q\,\varepsilon_{\mathcal{C}\Lambda^*}\,(x_1\cdots x_\ell P_{\mathcal{C}\Lambda}) = \varepsilon_{\Lambda^*}\,(x_1\cdots x_\ell P_{\mathcal{C}\Lambda}) \tag{72}$$

and similarly for $D_1^{\circledast}$. We can thus conclude that $P_\Lambda = x_1\cdots x_\ell P_{\mathcal{C}\Lambda}$. □

The following lemma concerning non-symmetric Macdonald polynomials, which is needed to prove the next proposition, is certainly known. But for lack of a proper reference, we provide a proof.

LEMMA 3. *Let $\eta = (\eta_1, \dots, \eta_N)$ be a composition such that $\eta_i = 0$ and $\eta_j \neq 0$ whenever $j \neq i$. Then*

$$E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_i=0} = E_{\eta_i^-}(x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_N) \tag{73}$$

and

$$E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_j=0} = 0 \quad \text{if } j > i. \tag{74}$$

where $\eta_i^- = (\eta_1, \dots, \eta_{i-1}, \eta_{i+1}, \dots, \eta_N)$ is the composition η without its i-th entry.

PROOF. We proceed by induction. We know from (215) that when $i = N$, we have

$$E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_N=0} = E_{\eta_N^-}(x_1, \dots, x_{N-1}) \tag{75}$$

while when $i < N$ and $j = N$, we have

$$E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_N=0} = 0. \tag{76}$$

Now, suppose by induction that when $i = k$ we have

$$E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_k=0} = E_{\eta_k^-}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N) \tag{77}$$

while when $i < k$ and $j = k$, we have

$$E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_k=0} = 0. \tag{78}$$

We thus need to prove that (77) and (78) still hold when k is replaced by $k-1$. We first consider the case (77). Suppose that $i = k-1$. Since $\eta_{k-1} = 0$ and $\eta_k \neq 0$ by hypothesis, we have from (216) that

$$T_{k-1} E_\eta(x_1, \dots, x_N) = c_\eta\, E_\eta(x_1, \dots, x_N) + t E_{s_{k-1}\eta}(x_1, \dots, x_N), \tag{79}$$

where c_η is an irrelevant constant. By definition of T_{k-1}, we also have

$$\begin{aligned} T_{k-1} E_\eta(x_1, \dots, x_N) =& t E_\eta(x_1, \dots, x_N) \\ &+ \frac{t x_{k-1} - x_k}{x_{k-1} - x_k} \big(E_\eta(x_1, \dots, x_{k-2}, x_k, x_{k-1}, x_{k+2}, \dots, x_N) - E_\eta(x_1, \dots, x_N) \big). \end{aligned} \tag{80}$$

Since $i = k-1$, we have by hypothesis that $E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_k=0} = 0$ and that

$$E_{s_{k-1}\eta}(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_k=0} = E_{\eta_{k-1}^-}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N). \tag{81}$$

Since the right-hand-sides of (79) and (80) have to be equal, we thus get after letting $x_k = 0$ that

$$t E_\eta(x_1, \dots, x_{k-2}, 0, x_{k-1}, x_{k+2}, \dots, x_N) = t E_{\eta_{k-1}^-}(x_1, \dots, x_{k-1}, x_{k+1}, \dots, x_N) \tag{82}$$

which, after the change of variables $x_{k-1} \longleftrightarrow x_k$, is equivalent to

$$E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_{k-1}=0} = E_{\eta_{k-1}^-}(x_1, \dots, x_{k-2}, x_k, \dots, x_N)\,. \tag{83}$$

Hence (77) holds when k is replaced by $k-1$.

We now prove that (78) holds when k is replaced by $k-1$. Since $i < j = k-1$, we have $\eta_{k-1} \neq 0$ and $\eta_k \neq 0$. By assumption, we thus obtain

$$E_\eta(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_k=0} = 0 \qquad \text{and} \qquad E_{s_{k-1}\eta}(x_1, \dots, x_N)\big|_{x_k=0} = 0. \tag{84}$$

Therefore, after again equating the right-hand-sides of (79) and (80) and letting $x_k = 0$, we get

$$tE_\eta(x_1, \dots, x_{k-2}, 0, x_{k-1}, x_{k+2}, \dots, x_N) = 0\,. \tag{85}$$

But this is amounts to (78) with k replaced by $k-1$ after the change of variables $x_{k-1} \longleftrightarrow x_k$. □

We are now ready to prove the following result.

PROPOSITION 6. *Let Λ be a superpartition whose diagram contains a circle in the first column, that is, such that $\Lambda_m = 0$. If $\ell = \ell(\Lambda)$, then*

$$(-1)^{m-1}\big[\partial_{\theta_\ell} P_\Lambda(x_1, \dots, x_\ell; \theta_1, \dots, \theta_\ell)\big]\big|_{x_\ell=0} = P_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(x_1, \dots, x_{\ell-1}; \theta_1, \dots, \theta_{\ell-1}). \tag{86}$$

PROOF. By symmetry, it is equivalent to prove

$$(-1)^{m-1}\big[\partial_{\theta_1} P_\Lambda(x_1, \dots, x_\ell; \theta_1, \dots, \theta_\ell)\big]\big|_{x_1=0} = P_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(x_2, \dots, x_\ell; \theta_2, \dots, \theta_\ell). \tag{87}$$

From (46), we get

$$\partial_{\theta_1} P_\Lambda = c_\Lambda \sum_{\sigma \in S_{2,\dots,\ell}/S_{2,\dots,m}\times S_{m^c}} \mathcal{K}_\sigma \theta_2 \cdots \theta_m A_m U^+_{m^c} E_{\Lambda^R}\,, \tag{88}$$

where

$$c_\Lambda = \frac{(-1)^{\binom{m}{2}}}{f_{\Lambda^s}(t)\, t^{\mathrm{inv}(\Lambda^s)}}. \tag{89}$$

Since $\Lambda = (0, \Lambda_{m-1}, \dots, \Lambda_1, \Lambda_\ell, \dots, \Lambda_{m+1})$ has only a zero entry in the first position, we obtain from Lemma 3 that

$$E_{\Lambda^R}(x_1, \dots, x_\ell)\big|_{x_1=0} = E_{(\Lambda_{m-1},\dots,\Lambda_1,\Lambda_\ell,\dots,\Lambda_{m+1})}(x_2, \dots, x_\ell) = E_{(\tilde{\mathcal{C}}\Lambda)^R}(x_2, \dots, x_\ell) \tag{90}$$

We can thus deduce from (88) that

$$[\partial_{\theta_1} P_\Lambda(x_1, \dots, x_\ell; \theta_1, \dots, \theta_\ell)]\big|_{x_1=0} = \frac{c_\Lambda}{c_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}} P_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(x_2, \dots, x_\ell; \theta_2, \dots, \theta_\ell). \tag{91}$$

Hence (87) holds since $c_\Lambda / c_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda} = (-1)^{\binom{m}{2}+\binom{m-1}{2}} = (-1)^{m-1}$ given that Λ^s and $(\tilde{\mathcal{C}}\Lambda)^s$ are equal. □

4. Evaluation and norm of the Macdonald polynomials in superspace

We prove in this section formulas for the evaluation and norm of the Macdonald polynomials in superspace that were conjectured in [**8**]. We will extend the methods used in [**11**] to prove the evaluation of the usual Macdonald polynomials.

Let $\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s)$ be a superpartition of fermionic degree m, and let $\delta_m = (m-1, m-2, \dots, 0)$ be the staircase partition. We define the evaluation $\mathcal{E}^m_{u,q,t}$ on the power-sum basis as

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}(p_\Lambda) = s_{\Lambda^a-\delta_m}\Big(\frac{1}{q^{m-1}}, \frac{t}{q^{m-2}}, \dots, t^{m-1}\Big) \prod_{i=1}^{\ell(\Lambda^s)} \left[p_{\Lambda^s_i}\Big(\frac{1}{q^{m-1}}, \dots, t^{m-1}\Big) + t^{m\Lambda^s_i} \cdot \frac{1-u^{\Lambda^s_i}}{1-t^{\Lambda^s_i}} \right] \tag{92}$$

where u is an indeterminate and $s_{\Lambda^a-\delta_m}$ is the Schur function indexed by the partition $\Lambda^a - \delta_m = (\Lambda^a_1 - m + 1, \Lambda^a_2 - m + 2, \dots, \Lambda^a_m)$. We observe that if $u = t^{N-m}$, then $\mathcal{E}^m_{t^{N-m},q,t}$

is the evaluation considered in [**9**] and such that for $F(x;\theta) = F(x_1, x_2, \dots; \theta_1, \theta_2, \dots)$ a symmetric function in superspace of fermionic degree m, we have

$$\mathcal{E}^m_{t^{N-m},q,t}\big(F(x;\theta)\big) = \left[\frac{\partial_{\theta_1}\cdots\partial_{\theta_m}F(x;\theta)}{\Delta_m(x)}\right]_{x_r=v_r}, \tag{93}$$

where

$$v_r = \begin{cases} t^{r-1}/q^{\max(m-r,0)} & \text{if } 1 \le r \le N \\ 0 & \text{if } r > N \end{cases} \tag{94}$$

and where $\Delta_m(x)$ is the Vandermonde determinant $\Delta_m(x) = \prod_{1\le i<j\le m}(x_i - x_j)$.

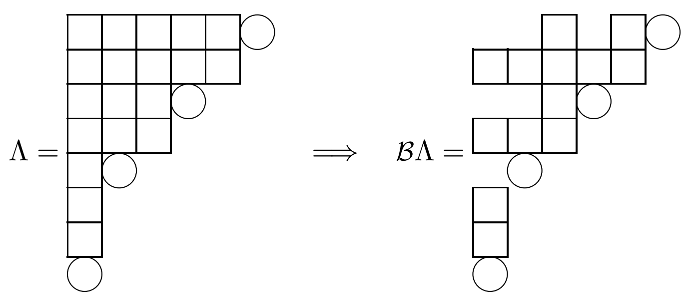
For a box $s = (i,j)$ in a partition λ (i.e., in row i and column j), we introduce the usual arm-lengths and leg-lengths:

$$a_\lambda(s) = \lambda_i - j \quad \text{and} \quad l_\lambda(s) = \lambda'_j - i \tag{95}$$

where we recall that λ' stands for the conjugate of the partition λ.

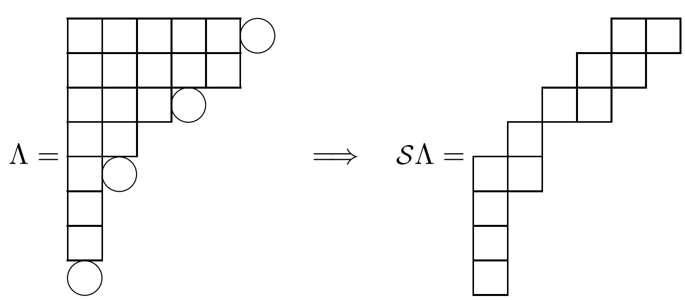
Let $\mathcal{B}(\Lambda)$ denote the set of boxes in the diagram of Λ that do not appear at the same time in a row containing a circle and in a column containing a circle.

Figure 6. The set of boxes $\mathcal{B}\Lambda$.



For Λ a superpartition of fermionic degree m, let $\mathcal{S}\Lambda$ be the skew diagram $\mathcal{S}\Lambda = \Lambda^{\circledast}/\delta_{m+1}$.

Figure 7. The set of boxes in $\mathcal{S}\Lambda$



Finally, for a partition λ, let $n(\lambda) = \sum_i (i-1)\lambda_i$. In the case of a skew partition λ/μ, $n(\lambda/\mu)$ stands for $n(\lambda) - n(\mu)$.

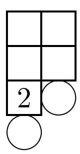
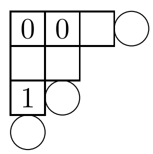
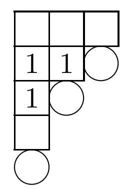
Theorem 4. *Let Λ be of fermionic degree m. Then the evaluation formula for the Macdonald polynomials in superspace reads*

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) = \frac{t^{n(\mathcal{S}\Lambda)+n((\Lambda')^a/\delta_m)}}{q^{(m-1)|\Lambda^a/\delta_m|-n(\Lambda^a/\delta_m)}} \frac{\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-(i-1)}u)}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^{\circledast}}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})} \tag{96}$$

or, equivalently, as

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) = \frac{t^{n((\Lambda')^a/\delta_m)}}{q^{(m-1)|\Lambda^a/\delta_m|-n(\Lambda^a/\delta_m)}} \frac{\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda}(t^{i-1}-q^{j-1}t^{m}u)}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^{\circledast}}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})}. \tag{97}$$

Remark 1. *The formula for the evalution conjectured in* [**8**] *involves a combinatorial number ζ_Λ instead of $n((\Lambda')^a/\delta_m)$ that we now describe. Consider the partial filling of the squares of Λ defined as follows: in each fermionic square of Λ write the number of bosonic squares above it; ζ_Λ is obtained by adding up these numbers. Here are three examples for which it is non-vanishing:*

$\zeta_{(1,0;2,2)} = 2:$  $\zeta_{(3,1,0;2)} = 1:$  $\zeta_{(2,1,0;3,1)} = 3:$  (98)

In Lemma 10 we will show that ζ_Λ and $n((\Lambda')^a/\delta_m)$ are equal, thus validating the conjectured expression for the evaluation given in [**8**].

The proof of the theorem is rather non-trivial and will occupy most of the remainder of this section. To simplify the exposition, we will establish a few results before actually proceeding to the proof of the theorem.

For a superpartition Λ of fermionic degree m, we define

$$\Phi^m_\Lambda(u;q,t) := \mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) \tag{99}$$

We also let

$$b_\Lambda(q,t) = \frac{1}{\|P_\Lambda\|^2} = \frac{1}{\langle\!\langle P_\Lambda|P_\Lambda\rangle\!\rangle_{q,t}}. \tag{100}$$

Lemma 4. *We have*

$$\Phi^m_\Lambda(u;q,t) = (-1)^{|\Lambda|+\binom{m}{2}}t^{-|\Lambda|}\, b_{\Lambda'}(t^{-1},q^{-1})\, \Phi^m_{\Lambda'}(u(qt)^m;t^{-1},q^{-1}). \tag{101}$$

Proof. We will first prove that if $F(x;\theta)$ is a symmetric functions in superspace of fermionic degree m and total degree n then

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}\Omega^{-1}_{q,t}F(x;\theta) = (-1)^n q^{-n}\mathcal{E}^m_{u(qt)^m,t^{-1},q^{-1}}F(x;\theta)\,, \tag{102}$$

where $\Omega_{q,t}^{-1}$ is the inverse of the endomorphism $\Omega_{q,t}$ defined in (58). It suffices to show that (102) holds on the power-sum basis. We have

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^m_{u,q,t}\Omega^{-1}_{q,t}\left(p_\Lambda\right) =&(-1)^{|\Lambda|-\ell(\Lambda^s)}\, q^{-|\Lambda^a|} \prod_{i=1}^{\ell(\Lambda^s)} \frac{1-t^{\Lambda_i^s}}{1-q^{\Lambda_i^s}}\, \mathcal{E}^m_{u,q,t}\left(p_\Lambda\right)\\
=&(-1)^{|\Lambda|-\ell(\Lambda^s)}\, q^{-|\Lambda^a|}\, s_{\Lambda^a-\delta_m}\left(\frac{1}{q^{m-1}},\dots,t^{m-1}\right)\\
&\times \prod_{i=1}^{\ell(\Lambda^s)} \frac{1-t^{\Lambda_i^s}}{1-q^{\Lambda_i^s}}\left[\frac{1}{q^{(m-1)\Lambda_i^s}}\cdot\frac{1-(qt)^{m\Lambda_i^s}}{1-(qt)^{\Lambda_i^s}}+t^{m\Lambda_i^s}\cdot\frac{1-u^{\Lambda_i^s}}{1-t^{\Lambda_i^s}}\right]
\end{aligned}$$

We then use the algebraic identity

$$\frac{1-r}{1-s}\left(\frac{s(1-RS)}{S(1-rs)}+\frac{R}{1-r}\right)=-\frac{1}{s}\left(\frac{R(1-R^{-1}S^{-1})}{r(1-r^{-1}s^{-1})}+\frac{1}{S(1-s^{-1})}\right) \tag{103}$$

with $r=t^{\Lambda_i^s}, s=q^{\Lambda_i^s}, R=t^{m\Lambda_i^s}$ and $S=q^{m\Lambda_i^s}$ to obtain

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}^m_{u,q,t}\Omega^{-1}_{q,t}\left(p_\Lambda\right) =&(-1)^{|\Lambda|-\ell(\Lambda^s)}\, q^{-|\Lambda^a|} s_{\Lambda^a-\delta_m}\left(\frac{1}{q^{m-1}},\dots,t^{m-1}\right)\\
&\times \prod_{i=1}^{\ell(\Lambda^s)}\left(-q^{-\Lambda_i^s}\left[t^{(m-1)\Lambda_i^s}\frac{1-(qt)^{-m\Lambda_i^s}}{1-(qt)^{-\Lambda_i^s}}+q^{-m\Lambda_i^s}\cdot\frac{1-u^{\Lambda_i^s}(qt)^{m\Lambda_i^s}}{1-q^{-\Lambda_i^s}}\right]\right)\\
=&(-1)^{|\Lambda|}q^{-|\Lambda|}\mathcal{E}^m_{u(qt)^m,t^{-1},q^{-1}}\big(p_\Lambda\big),
\end{aligned}$$

where we used the relation $|\Lambda|=|\Lambda^a|+|\Lambda^s|$. This proves (102).

Now, using Theorem 3, we have

$$P_\Lambda(q,t)=(-1)^{\binom{m}{2}}(qt^{-1})^{|\Lambda|}b_{\Lambda'}(t^{-1},q^{-1})\,\Omega^{-1}_{q,t}\,P_{\Lambda'}(t^{-1},q^{-1}). \tag{104}$$

Therefore, applying $\mathcal{E}^m_{u,q,t}$ on both sides of the previous equation and using (101), we get

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}\left(P_\Lambda(q,t)\right)=(-1)^{|\Lambda|+\binom{m}{2}}t^{-|\Lambda|}\,b_{\Lambda'}(t^{-1},q^{-1})\,\mathcal{E}^m_{u(qt)^m,t^{-1},q^{-1}}\left(P_{\Lambda'}(t^{-1},q^{-1})\right), \tag{105}$$

which proves the lemma. □

We can now give $\Phi^m_\Lambda(u;q,t)$ explicitly up to a constant in $\mathbb{Q}(q,t)$.

Lemma 5. *We have*

$$\Phi^m_\Lambda(u;q,t)=v_\Lambda(q,t)\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda}\left(1-q^{j-1}t^{m-(i-1)}u\right),$$

where $v_\Lambda(q,t)\in\mathbb{Q}(q,t)$.

Proof. It is known [] that

$$\frac{\partial_{\theta_1}\cdots\partial_{\theta_m}m_\Gamma(x_1,\dots,x_N)}{\Delta_m(x)}=s_{\Gamma^a-\delta_m}(x_1,\dots,x_m)m_{\Gamma^s}(x_{m+1},\dots,x_N), \tag{106}$$

which implies that if $N-m<\ell(\Gamma^s)$ then $m_{\Gamma^s}(x_{m+1},\dots,x_N)=0$. Now, by triangularity, we have

$$P_\Lambda = m_\Lambda + \sum_{\Omega<\Lambda} c_\Omega(q,t)\, m_\Omega, \tag{107}$$

where by definition of the dominance order on superpartitions the superpartitions Ω that appear in the sum are such that $\ell(\Omega^s)\geq \ell(\Lambda^s)$. Hence

$$\frac{\partial_{\theta_1}\cdots\partial_{\theta_m} P_\Lambda(x_1,\dots,x_N)}{\Delta_m(x)} = 0 \tag{108}$$

whenever $N-m<\ell(\Lambda^s)$. We can thus use (93) to conclude that

$$\Phi^m_\Lambda(u;q,t)=0 \qquad \text{if} \quad u=1,t,\dots,t^{\ell(\Lambda^s)-1}. \tag{109}$$

Using Lemma 4, this implies

$$\Phi^m_{\Lambda'}(u(qt)^m;t^{-1},q^{-1})=0 \qquad \text{if} \quad u=1,t,\dots,t^{\ell(\Lambda^s)-1}, \tag{110}$$

which amounts to

$$\Phi^m_\Lambda(u;q,t)=0 \qquad \text{if} \quad u=q^{-m}t^{-m},q^{-(m+1)}t^{-m},\dots,q^{1-\Lambda_1^{\circledast}}t^{-m} \tag{111}$$

since $\ell\big((\Lambda')^s\big)+m=\Lambda_1^{\circledast}$. It is thus immediate that

$$\prod_{i=m+1}^{\Lambda_1^{\circledast}} (1-q^{i-1}t^m u) \quad \text{divides} \quad \Phi^m_\Lambda(u;q,t) \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}(q,t)[u]\,. \tag{112}$$

From Proposition 2, we have

$$P_\Lambda(x;\theta)=\sum_\Lambda \frac{1}{\|P_\Omega\|^2} P_{\Lambda/\Omega}(x_1,\theta_1)\, P_\Omega(x_2,x_3,\dots;\theta_2,\theta_3,\dots), \tag{113}$$

Since $P_\Gamma(x_1,\theta_1)=0$ whenever $\ell(\Gamma)>1$, we have that if $P_{\Lambda/\Omega}(x_1,\theta_1)\neq 0$ then either $P_{\Lambda/\Omega}=P_{(\emptyset;r)}$ or $P_{\Lambda/\Omega}=P_{(r;)}$ for a certain r. From Propositions 3 and 4, this implies that $P_{\Lambda/\Omega}(x_1,\theta_1)=0$ unless Λ/Ω is a horizontal r-strip or a horizontal $\tilde r$-strip. Consequently, $\partial_{\theta_1}P_{\Lambda/\Omega}(x_1,\theta_1)=0$ unless Λ/Ω is a horizontal $\tilde r$-strip. Therefore, we deduce from (113) that

$$\mathcal{E}^m_{t^{N-m},q,t}\big(P_\Lambda\big)=\sum_\Omega \psi_{\Lambda/\Omega}(q,t)\,\mathcal{E}^{m-1}_{t^{N-1-(m-1)},q,t}\big(P_\Omega\big). \tag{114}$$

where the sum is over all Ω's such that Λ/Ω is a horizontal $\tilde r$-strip for a certain r. Observe that in the previous equation, the coefficient $\psi_{\Lambda/\Omega}(q,t)$ can be given explicitly:

$$\psi_{\Lambda/\Omega}(q,t)=\frac{(-1)^{m-1}t^{|\Omega|}}{\|P_\Omega\|^2}\left[\frac{\partial_{\theta_1}P_{\Lambda/\Omega}(x_1;\theta_1)}{\prod_{1\leq j\leq m}(x_1-x_j)}\right]_{x_r=v_r} \tag{115}$$

where the sign comes from the commutation of $\partial_{\theta_2}\cdots\partial_{\theta_m}$ with $P_{\Lambda/\Omega}(x_1;\theta_1)$, which is of fermionic degree 1, and $t^{|\Omega|}$ comes from the fact that P_Ω is of total degree $|\Omega|$ and that the new evaluation of each variable $x_2,x_3,\dots,x_N$ needs to be multiplied by t to coincide with the original evaluation. Now, given that (114) holds for $N=m,m+1,m+2,\dots$, we have that

$$\Phi^m_\Lambda(u;q,t)=\sum_\Omega \psi_{\Lambda/\Omega}(q,t)\,\Phi^{m-1}_\Omega(u;q,t) \tag{116}$$

where the sum is over all Ω's such that Λ/Ω is a horizontal $\tilde r$-strip for a certain r.

Since Λ/Ω is a horizontal $\tilde{r}$-strip, we have that $\Omega^{\circledast} \supseteq (\Lambda_2^{\circledast}, \Lambda_3^{\circledast}, \dots)$. Hence, from (112), we see that $\prod_{i=m}^{\Lambda_2^{\circledast}}(1-q^{i-1}t^{m-1}u)$ always divides $\Phi_\Omega^{m-1}(u;q,t)$ in (116), which gives that

$$\prod_{i=m}^{\Lambda_2^{\circledast}}(1-q^{i-1}t^m u) \quad \text{divides} \quad \Phi_\Lambda^m(u;q,t) \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}(q,t)[u]\,. \tag{117}$$

Repeating the argument again and again, we get that

$$\prod_{j=1}^{m}\prod_{i=m-j+2}^{\Lambda_j^{\circledast}}(1-q^{i-1}t^{m-(j-1)}u) \quad \text{divides} \quad \Phi_\Lambda^m(u;q,t) \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}(q,t)[u] \tag{118}$$

and that

$$\Phi_\Lambda^m(u;q,t) = \sum_\Omega \phi_{\Lambda/\Gamma}(q,t)\,\Phi_\Gamma^0(u;q,t) \tag{119}$$

for some coefficients $\phi_{\Lambda/\Gamma}(q,t)$, where the sum is over superperpartitions such that $\Gamma^{\circledast} \supseteq (\Lambda_{m+1}^{\circledast}, \Lambda_{m+2}^{\circledast}, \dots)$. Hence, using Theorem 5.3 of [**11**], we have that every term $\Phi_\Gamma^0(u;q,t)$ in (119) is divisible by

$$\prod_{j=m+1}^{\ell(\Lambda^{\circledast})}\prod_{i=1}^{\Lambda_j^{\circledast}}(1-q^{i-1}t^{m-(j-1)}u)$$

and, consequently, so is $\Phi_\Lambda^m(u;q,t)$. Together with (118), this implies that

$$\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-(i-1)}u) \quad \text{divides} \quad \Phi_\Lambda^m(u;q,t) \quad \text{in} \quad \mathbb{Q}(q,t)[u]\,. \tag{120}$$

Now, $\mathcal{E}_{u,q,t}^m(p_\Omega)$ is a polynomial in u of degree $|\Omega^s|$. For Ω's of fixed fermionic and total degrees, $|\Omega^s|$ is maximal when $\Omega^a = \delta_m$, in which case $|\Omega^s| = |\Omega| - |\delta_m|$. Therefore, $\mathcal{E}_{u,q,t}^m(P_\Lambda) = \Phi_\Lambda^m(u;q,t)$ is a polynomial in u of degree at most $|\Lambda| - |\delta_m|$. From (120), we conclude immediately that

$$\Phi_\Lambda^m(u;q,t) = v_\Lambda(q,t)\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-(i-1)}u). \tag{121}$$

since $\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-(i-1)}u)$ is a polynomial in u of degree $|\Lambda^{\circledast}| - |\delta_{m+1}| = |\Lambda| - |\delta_m|$. □

The coefficients $v_\Lambda(q,t)$ in Lemma 5 satisfy the following recursion.

LEMMA 6. *Let Λ be a superpartition of fermionic degree m such that $\Lambda_m \neq 0$ and let $\ell = \ell(\Lambda)$. Then*

$$\frac{v_\Lambda(q,t)}{v_{\mathcal{C}\Lambda}(q,t)} = \frac{t^{\binom{\ell}{2}}}{q^{\binom{m}{2}}}\cdot\frac{1}{\prod_{i=1}^{\ell}1-q^{\Lambda_i^{\circledast}-1}t^{\ell-(i-1)}}. \tag{122}$$

where we recall that $\mathcal{C}\Lambda$ is the superpartion whose diagram is that of Λ without its first column.

PROOF. Given that $\Lambda_m \neq 0$, Proposition 5 gives

$$P_\Lambda(x_1,\dots,x_\ell;\theta_1,\dots,\theta_\ell) = x_1\cdots x_\ell P_{\mathcal{C}\Lambda}(x_1,\dots,x_\ell;\theta_1,\dots,\theta_\ell). \tag{123}$$

As we have seen, $\mathcal{E}_{t^{\ell-m},q,t}$ corresponds to the evaluation when the number of variables is equal to ℓ. Recalling that $\Phi_\Lambda(t^{\ell-m};q,t) = \mathcal{E}_{t^{\ell-m},q,t}(P_\Lambda)$, we have by applying $\mathcal{E}_{t^{\ell-m},q,t}$ on both sides of (123) that

$$\Phi_\Lambda(t^{\ell-m};q,t) = \frac{t^{\binom{\ell}{2}}}{q^{\binom{m}{2}}}\Phi_{\mathcal{C}\Lambda}(t^{\ell-m};q,t) \tag{124}$$

Using Lemma 5, we can immediately deduce that

$$\frac{v_\Lambda(q,t)}{v_{\mathcal{C}\Lambda}(q,t)} = \frac{t^{\binom{\ell}{2}}}{q^{\binom{m}{2}}} \cdot \frac{\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}(\mathcal{C}\Lambda)} 1-q^{j-1}t^{\ell-(i-1)}}{\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda} 1-q^{j-1}t^{\ell-(i-1)}} = \frac{t^{\binom{\ell}{2}}}{q^{\binom{m}{2}}} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{\ell} 1-q^{\Lambda_i^{\circledast}-1}t^{\ell-(i-1)}}. \tag{125}$$

□

In order to find the explicit value of $v_\Lambda(q,t)$, we need another recursion when the first column of the diagram of Λ contains a circle. This turns out to be a litte tricky. For that purpose, following what was done in the case of the Jack polynomials in superspace [**16**], we first need to define a second type of evaluation. Let $\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}$ be such that on a symmetric fonction in superspace $F(x;\theta)$ of fermionic degree m and total degree N

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}\big(F(x:\theta)\big) = \mathcal{E}^{m-1}_{u;q,t}\Big[\big[\partial_{\theta_1}F(x;\theta)\big]_{x_1=0}\Big]_{x_i\to x_{i-1},\theta_i\to\theta_{i-1}},$$

where $x_i \to x_{i-1}, \theta_i \to \theta_{i-1}$, means that the set of variables $(x_2,x_3,\dots;\theta_2,\theta_3,\dots)$ is sent to $(x_1,x_2,\dots;\theta_1,\theta_2,\dots)$. Note that when $u=t^{N-m}$ the second evaluation takes by symmetry the simpler form

$$\widetilde{\mathcal{E}}_{t^{N-m},q,t}\big(F(x,\theta)\big) := \mathcal{E}^{m-1}_{t^{N-m},q,t}\big(\partial_{\theta_N}F(x;\theta)\big) \tag{126}$$

since $x_N=0$ in the evaluation $\mathcal{E}^{m-1}_{t^{N-m},q,t}$. For a superpartition Λ of fermionic degree m, we define

$$\widetilde{\Phi}^m_\Lambda(u;q,t) := \widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) \tag{127}$$

We also let $\widetilde{S}\Lambda$ be the skew partition

$$\widetilde{S}\Lambda := \Lambda^*/\delta_m\,. \tag{128}$$

THEOREM 5. *Let Λ be of fermionic degree $m>0$. Then the second evaluation formula for the Macdonald polynomials in superspace reads*

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) = \frac{t^{n(\widetilde{S}\Lambda)+n((\Lambda')^a/\delta_{m-1})}}{q^{(m-2)|\Lambda^a/\delta_{m-1}|-n(\Lambda^a/\delta_{m-1})}}\frac{\prod_{(i,j)\in\widetilde{S}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-i}u)}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})} \tag{129}$$

or, equivalently, as

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) = \frac{t^{n((\Lambda')^a/\delta_{m-1})}}{q^{(m-2)|\Lambda^a/\delta_{m-1}|-n(\Lambda^a/\delta_{m-1})}}\frac{\prod_{(i,j)\in\widetilde{S}\Lambda}(t^{i-1}-q^{j-1}t^{m-1}u)}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})} \tag{130}$$

PROOF. Theorem 5 will follow immediately from Lemma 7 once the explicit expression for $\widetilde{v}_\Lambda(q,t)$ has been established in Corollary 2. □

We can again give $\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) = \widetilde{\Phi}^m_\Lambda(u;q,t)$ explicitly up to a constant in $\mathbb{Q}(q,t)$.

LEMMA 7. *We have*

$$\widetilde{\Phi}^m_\Lambda(u;q,t)=\widetilde{v}_\Lambda(q,t)\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-1-(i-1)}u),\tag{131}$$

where $\widetilde{v}_\Lambda(q,t)\in\mathbb{Q}(q,t)$.

PROOF. We use again Proposition 2 to get

$$P_\Lambda(x;\theta)=\sum_\Lambda\frac{1}{\|P_\Omega\|^2}P_{\Lambda/\Omega}(x_1,\theta_1)\,P_\Omega(x_2,x_3,\dots;\theta_2,\theta_3,\dots),\tag{132}$$

As seen in the proof of Lemma 5, $\partial_{\theta_1}P_{\Lambda/\Omega}(x_1,\theta_1)=0$ unless Λ/Ω is a horizontal $\tilde{r}$-strip, which implies that $\left[\partial_{\theta_1}P_{\Lambda/\Omega}(x_1,\theta_1)\right]_{x_1=0}=0$ unless Λ/Ω is a horizontal $\tilde{0}$-strip, that is, unless Ω can be obtained by removing a circle from Λ.

Therefore, we deduce from (132) that

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{t^{N-m},q,t}(P_\Lambda)=\sum_\Omega\widetilde{\psi}_{\Lambda/\Omega}(q,t)\,\mathcal{E}^{m-1}_{t^{N-1-(m-1)},q,t}(P_\Omega).\tag{133}$$

where the sum is over all Ω's such that Λ/Ω is a horizontal $\tilde{0}$-strip. The coefficient $\psi_{\Lambda/\Omega}(q,t)$ can this time be given explicitly as

$$\widetilde{\psi}_{\Lambda/\Omega}(q,t)=\frac{(-1)^{m-1}}{\|P_\Omega\|^2}\left[\frac{\partial_{\theta_1}P_{\Lambda/\Omega}(x_1;\theta_1)}{\prod_{1\le j\le m}(x_1-x_j)}\right]_{x_1=0,x_2=v_1,\dots,x_m=v_{m-1}}\tag{134}$$

where the sign comes from the commutation of $\partial_{\theta_2}\cdots\partial_{\theta_m}$ with $P_{\Lambda/\Omega}(x_1;\theta_1)$, which is of fermionic degree 1. Again, given that (133) holds for $N=m,m+1,m+2,\dots$, we have that

$$\widetilde{\Phi}^m_\Lambda(u;q,t)=\sum_\Omega\widetilde{\psi}_{\Lambda/\Omega}(q,t)\,\Phi^{m-1}_\Omega(u;q,t)\tag{135}$$

where the sum is over all Ω's such that Λ/Ω is a horizontal $\tilde{0}$-strip.

Since Ω is obtained from Λ by removing a circle, we have that Ω is a superpartition of fermionic degree $m-1$ such that $\Omega^{\circledast}\supseteq\Omega^*=\Lambda^*$. Hence, from Lemma 5, every term $\Phi^{m-1}_\Omega(u;q,t)$ in (135) is divisible in $\mathbb{Q}(q,t)[u]$ by

$$\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-1-(i-1)}u)$$

and thus so is $\widetilde{\Phi}^m_\Lambda(u;q,t)$.

The evaluation $\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}(p_\Omega)$ is again a polynomial in u of degree $|\Omega^s|$ which means that $\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}(P_\Lambda)=\widetilde{\Phi}^m_\Lambda(u;q,t)$ is still a polynomial in u of degree at most $|\Lambda|-|\delta_m|$. Thus, from the previous observation,

$$\widetilde{\Phi}^m_\Lambda(u;q,t)=\widetilde{v}_\Lambda(q,t)\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-1-(i-1)}u).\tag{136}$$

since $\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-1-(i-1)}u)$ is a polynomial in u of degree $|\Lambda|-|\delta_m|$. $\square$

Remarkably, the coefficients $v_\Lambda(q,t)$ and $\widetilde{v}_\Lambda(q,t)$ in Lemmas 5 and 7 are equal up to powers of q and t.

Lemma 8. *We have*

$$\frac{v_\Lambda(q,t)}{\widetilde{v}_\Lambda(q,t)} = \frac{t^{|(\Lambda')^a|-(m-1)^2}}{q^{|\Lambda^a|-(m-1)^2}} \tag{137}$$

Proof. As was mentioned before, for all Ω's of fixed fermionic and total degrees, $\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}(p_\Omega)$ is of maximal degree in u when Ω is of the form $\Omega = (\delta_m;\Omega^s)$. By the triangularity between the power-sums and monomial bases [], this is also the case for the momnomial basis, that is, $\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}(m_\Omega)$ is of maximal degree in u when Ω is of the form $\Omega = (\delta_m;\Omega^s)$. In that case, we have

$$\frac{\partial_{\theta_1}\cdots\partial_{\theta_{m-1}}\partial_{\theta_N} m_\Omega}{\Delta_{m-1}(x)\prod_{1\le i\le m-1}(x_i-x_N)}\prod_{1\le i\le m-1}(x_i-x_N) = \left[\prod_{1\le i\le m-1}(x_i-x_N)\right] m_{\Omega^s}(x_m,x_{m+1},\dots,x_{N-1})$$

Therefore, considering the evaluation in $N-1$ variables (in which case $x_N=0$), we get

$$\begin{aligned}
\widetilde{\mathcal{E}}^m_{t^{N-m},q,t}(m_\Omega) &= \mathcal{E}^{m-1}_{t^{N-1-(m-1)},q,t}\big(\partial_{\theta_N} m_\Omega\big)\\
&= \left(\frac{1}{q^{m-2}}\right)\left(\frac{t}{q^{m-3}}\right)\cdots\left(\frac{t^{m-2}}{1}\right) m_{\Omega^s}(t^{m-1},\dots,t^{N-2})\\
&= \left(\frac{t}{q}\right)^{\binom{m-1}{2}} t^{-|\Omega^s|} m_{\Omega^s}(t^m,\dots,t^{N-1})
\end{aligned}$$

which implies that

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{t^{N-m},q,t}(m_\Omega) = \left(\frac{t}{q}\right)^{\binom{m-1}{2}} t^{-|\Omega^s|}\mathcal{E}^m_{t^{N-m},q,t}(m_\Omega), \tag{138}$$

since in our case

$$\frac{\partial_{\theta_1}\cdots\partial_{\theta_m} m_\Omega(x_1,\dots,x_N;\theta_1,\dots,\theta_N)}{\Delta_m(x)} = m_{\Omega^s}(x_{m+1},\dots,x_N).$$

Now, given that (138) is valid for all values of N, we can conclude that

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}(m_\Omega) = \left(\frac{t}{q}\right)^{\binom{m-1}{2}} t^{-|\Omega^s|}\mathcal{E}^m_{u,q,t}(m_\Omega). \tag{139}$$

From Lemma 7, $\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,(q,t)}(P_\Lambda)$ is a polynomial of degree $|\Lambda|-|\delta_m| = |\Lambda^*|-\binom{m}{2}$. As we have seen, this degree is only obtainable from the m_Ω's in the expansion of P_Λ such that Ω is of the form $\Omega=(\delta_m;\Omega^s)$ with $|\Omega^s| = |\Lambda^*|-\binom{m}{2}$. Therefore, from (139), we get that when considering only the maximal coefficient

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}(P_\Lambda)\big|_{u^{\max}} = \left(\frac{t}{q}\right)^{\binom{m-1}{2}} t^{-|\Lambda^*|+|\delta_m|}\mathcal{E}^m_{u,q,t}(P_\Lambda)\big|_{u^{\max}}. \tag{140}$$

From Lemmas 5 and 7, we thus get that

$$\left(\frac{t}{q}\right)^{\binom{m-1}{2}} t^{-|\Lambda^*|+|\delta_m|} v_\Lambda(q,t)\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda} q^{j-1}t^{m-(i-1)} = \widetilde{v}_\Lambda(q,t)\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda} q^{j-1}t^{m-1-(i-1)}, \tag{141}$$

which amounts to

$$\frac{v_\Lambda(q,t)}{\widetilde{v}_\Lambda(q,t)} = \left(\frac{t}{q}\right)^{-\binom{m-1}{2}} \frac{\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda} q^{j-1}t^{m-(i-1)}}{\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda} q^{j-1}t^{m-(i-1)}} = \left(\frac{t}{q}\right)^{-\binom{m-1}{2}} \frac{\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda} q^{j-1}t^{-(i-1)}}{\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda} q^{j-1}t^{-(i-1)}} \tag{142}$$

since $\mathcal{S}\Lambda$ and $\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda$ have the same number of cells. For the cells of $\mathcal{S}\Lambda$ that do not belong to $\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda$, we have that $i-1$ (resp. $j-1$) is the length of a given column (resp. row) of Λ^a. This explains the factor $t^{|(\Lambda')^a|}/q^{|\Lambda^a|}$ in (8). Finally, the cells of $\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda$ that do not belong to $\mathcal{S}\Lambda$ provide a factor $(t/q)^{-\binom{m}{2}}$. The lemma then follows since $\binom{m}{2}+\binom{m-1}{2}=(m-1)^2$. $\square$

We can now establish our second recursion for $v_\Lambda(q,t)$ that will apply when the first column in the diagram of Λ contains a circle.

Lemma 9. *If Λ is a superpartition of length ℓ such that $\Lambda_m = 0$, then*

$$\frac{v_\Lambda(q,t)}{v_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(q,t)} = \frac{t^{|(\Lambda')^a|-(m-1)^2}}{q^{|\Lambda^a|-(m-1)^2}} \prod_{i\in fr(\tilde{\mathcal{C}}\Lambda)} (1-q^{\Lambda_i^{\circledast}-1}t^{\ell-1-(i-1)}), \tag{143}$$

where $fr(\tilde{\mathcal{C}}\Lambda)$ stands for the rows of $\tilde{\mathcal{C}}\Lambda$ that contain a circle.

Proof. From our hypotheses, we can use Proposition 6 to get

$$\left[\partial_\ell P_\Lambda(x_1,\ldots,x_\ell;\theta_1,\ldots,\theta_\ell)\right]_{x_\ell=0} = P_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(x_1,\ldots,x_{\ell-1};\theta_1,\ldots,\theta_{\ell-1}). \tag{144}$$

Applying the evaluation in $\ell-1$ variables $\mathcal{E}^{m-1}_{t^{\ell-1-(m-1)},q,t}$ on both sides of the previous equation, we obtain

$$\widetilde{\Phi}^m_\Lambda(t^{\ell-m};q,t) = \Phi^{m-1}_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(t^{\ell-m};q,t). \tag{145}$$

Therefore, from Lemmas 5 and 7, we have

$$\widetilde{v}_\Lambda(q,t)\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{\ell-1-(i-1)}) = v_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(q,t)\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}(\tilde{\mathcal{C}}\Lambda)}(1-q^{j-1}t^{\ell-1-(i-1)}) \tag{146}$$

which gives

$$\frac{\widetilde{v}_\Lambda(q,t)}{v_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(q,t)} = \prod_{i\in fr(\tilde{\mathcal{C}}\Lambda)}(1-q^{\Lambda_i^{\circledast}-1}t^{\ell-1-(i-1)}). \tag{147}$$

The lemma then follows from Lemma 8. $\square$

We can now proceed to the proof of Theorem 4.

Proof of Theorem 4. By Lemma 5, we have

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda(q,t)\big) = v_\Lambda(q,t)\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda}\Big(1-q^{j-1}t^{m-(i-1)}u\Big)$$

where $v_\Lambda(q,t)\in\mathbb{Q}(q,t)$. The theorem will thus follow if we can show that

$$v_\Lambda(q,t) = \frac{t^{n(\mathcal{S}\Lambda)+n((\Lambda')^a/\delta_m)}}{q^{(m-1)|\Lambda^a/\delta_m|-n(\Lambda^a/\delta_m)}}\frac{1}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})} \tag{148}$$

We will use induction on the number of columns and on the fermionic degree of Λ. We first suppose that the first column is of length ℓ and does not contain a circle. By Lemma 6, we have

$$\frac{v_\Lambda(q,t)}{v_{\mathcal{C}\Lambda}(q,t)} = \frac{t^{\binom{\ell}{2}}}{q^{\binom{m}{2}}} \cdot \frac{1}{\prod_{i=1}^{\ell} 1 - q^{\Lambda_i^{\circledast}-1} t^{\ell-(i-1)}} = \frac{t^{\binom{\ell}{2}}}{q^{\binom{m}{2}}} \cdot \frac{1}{\prod_s (1 - q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)} t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})} \tag{149}$$

where the product is over the cells s in the first column of Λ. By induction on the number of columns of Λ, (148) will thus hold in that case if we can show that

(i) $n(\mathcal{S}\Lambda) + n((\Lambda')^a/\delta_m) = n(\mathcal{S}\mathcal{C}\Lambda) + n((\mathcal{C}\Lambda')^a/\delta_m) + \binom{\ell}{2}$

(ii) $(m-1)|\Lambda^a/\delta_m| - n(\Lambda^a/\delta_m) = (m-1)|\mathcal{C}\Lambda^a/\delta_m| - n(\mathcal{C}\Lambda^a/\delta_m) + \binom{m}{2}$

This is indeed the case, since the first relation follows from

$$n(\mathcal{S}\Lambda) - n(\mathcal{S}\mathcal{C}\Lambda) = \binom{\ell}{2} \qquad \text{and} \qquad n((\Lambda')^a/\delta_m) = n((\mathcal{C}\Lambda')^a/\delta_m)$$

while the second is a consequence of

$$|\Lambda^a/\delta_m| - |\mathcal{C}\Lambda^a/\delta_m| = m \qquad \text{and} \qquad n(\Lambda^a/\delta_m) - n(\mathcal{C}\Lambda^a/\delta_m) = \binom{m}{2}$$

We now consider the case where the first column of Λ contains a circle. In that case, we use Lemma 9 to get (assuming that the length of Λ is ℓ)

$$\frac{v_\Lambda(q,t)}{v_{\tilde{\mathcal{C}}\Lambda}(q,t)} = \frac{t^{|(\Lambda')^a|-(m-1)^2}}{q^{|\Lambda^a|-(m-1)^2}} \prod_{i \in fr(\tilde{\mathcal{C}}\Lambda)} (1 - q^{\Lambda_i^{\circledast}-1} t^{\ell-1-(i-1)}) \tag{150}$$

By induction on the fermionic degree, (148) will also hold in that case if we can prove that

(I) $\displaystyle\prod_{s \in \mathcal{B}\Lambda} \frac{1}{1 - q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)} t^{l_{\Lambda^*}(s)+1}} = \frac{\prod_{i \in fr(\tilde{\mathcal{C}}\Lambda)} (1 - q^{\Lambda_i^{\circledast}-1} t^{\ell-1-(i-1)})}{\prod_{s \in \mathcal{B}\tilde{\mathcal{C}}\Lambda} 1 - q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)} t^{l_{\Lambda^*}(s)+1}}$

(II) $n(\mathcal{S}\Lambda) + n((\Lambda')^a/\delta_m) = n(\mathcal{S}\widetilde{\mathcal{C}}\Lambda) + n((\widetilde{\mathcal{C}}\Lambda')^a/\delta_{m-1}) + |(\Lambda')^a| - (m-1)^2$

(III) $(m-1)|\Lambda^a/\delta_m| - n(\Lambda^a/\delta_m) = (m-2)|\widetilde{\mathcal{C}}\Lambda^a/\delta_{m-1}| - n(\widetilde{\mathcal{C}}\Lambda^a/\delta_{m-1}) + |\Lambda^a| - (m-1)^2$

The first relation holds since for $s = (i,1)$ we have $a_{\Lambda^\circledast}(s) = \Lambda_i^\circledast - 1$ and $l_{\Lambda^*}(s) = \ell - i - 1$, which means that the contribution of the cells in fermionic rows in the first column of Λ are canceled out. Relation (II) is seen as follows: we have

$$n(\mathcal{S}\Lambda) - n(\mathcal{S}\widetilde{\mathcal{C}}\Lambda) = n(\Lambda^\circledast) - n(\Lambda^*) - n(\delta_{m+1}) + n(\delta_m) = \ell - 1 - \binom{m}{2}$$

and

$$n((\Lambda')^a/\delta_m) - n((\widetilde{\mathcal{C}}\Lambda')^a/\delta_m) = n((\Lambda')^a) - n((\widetilde{\mathcal{C}}\Lambda')^a) - n(\delta_m) + n(\delta_{m-1}) = |(\Lambda')^a| - (\ell-1) - \binom{m-1}{2}$$

where the last relation follows from the fact that if $\hat{\lambda} = (\lambda_2, \lambda_3, \dots)$ (that is, if $\hat{\lambda}$ is the partition λ without its first entry) then $n(\lambda) - n(\hat{\lambda}) = |\hat{\lambda}| = |\lambda| - \lambda_1$. Relation (II) is then seen to hold since $\binom{m-1}{2} + \binom{m}{2} = (m-1)^2$.

Given that $\Lambda^a = (\widetilde{\mathcal{C}}\Lambda)^a$, we have that Relation (III) follows from $(m-1)|\Lambda^a| - (m-2)|\Lambda^a| = |\Lambda^a|$ and

$$(m-1)|\delta_m| - (m-2)|\delta_{m-1}| - n(\delta_m) + n(\delta_{m-1}) = (m-1)\binom{m}{2} - (m-2)\binom{m-1}{2} - \binom{m-1}{2} = (m-1)^2$$

□

The following corrollary will imply Theorem 5.

COROLLARY 2. *We have that*

$$\widetilde{v}_\Lambda(q,t) = \frac{t^{n(\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda)+n((\Lambda')^a/\delta_{m-1})}}{q^{(m-2)|\Lambda^a/\delta_{m-1}|-n(\Lambda^a/\delta_{m-1})}} \frac{1}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})} \tag{151}$$

PROOF. From Lemma 8 and (148), we obtain that

$$\widetilde{v}_\Lambda(q,t) = \frac{t^{n(\mathcal{S}\Lambda)+n((\Lambda')^a/\delta_m)-|(\Lambda')^a|+(m-1)^2}}{q^{(m-1)|\Lambda^a/\delta_m|-n(\Lambda^a/\delta_m)-|\Lambda^a|+(m-1)^2}} \frac{1}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})} \tag{152}$$

We therefore only need to show that the q and t powers are such as in (151). Using

$$n(\mathcal{S}\Lambda) - n(\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda) = n(\Lambda^\circledast) - n(\Lambda^*) - n(\delta_{m+1}) + n(\delta_m) = \binom{m-1}{2} = |(\Lambda')^a| - \binom{m}{2}$$

the t power is seen to be the correct one with the help of the relations $n(\delta_m) - n(\delta_{m-1}) = \binom{m-1}{2}$ and $\binom{m}{2} + \binom{m-1}{2} = (m-1)^2$. In order to prove that the q power is such as in (151), it suffices to show that

$$-(m-1)|\delta_m| + (m-2)|\delta_{m-1}| + n(\delta_m) - n(\delta_{m-1}) = -(m-1)^2$$

which can straightforwardly be checked using $|\delta_m| = \binom{m}{2}$ and $n(\delta_m) - n(\delta_{m-1}) = \binom{m-1}{2}$.

□

We now prove the claim made in Remark 1 that ζ_Λ and $n\big((\Lambda')^a/\delta_m\big)$ are equal.

LEMMA 10. *Let $\Lambda = (\Lambda^a;\Lambda^s)$ be a superpartition of degree m. We have*

$$\zeta_\Lambda = n\big((\Lambda')^a\big) - n(\delta_m) = n\big((\Lambda')^a/\delta_m\big) \tag{153}$$

PROOF. For simplicity, we let $\Omega = \Lambda'$. We thus have to prove that

$$\zeta_{\Omega'} = n(\Omega^a) - n(\delta_m) \tag{154}$$

We will proceed by induction on the number of rows of Ω. Let $\hat{\Omega}$ be superpartition whose diagram is that of Ω without its first row. If the first row of the diagram of Ω does not contain a circle, then

$$\zeta_{\hat{\Omega}'} = \zeta_{\Omega'} = n(\Omega^a) - n(\delta_m) = n(\hat{\Omega}^a) - n(\delta_m)$$

and (154) holds by induction. Otherwise, we have

$$\zeta_{\Omega'} - \zeta_{\hat{\Omega}'} = \big(\Omega^a_2 - (m-1)\big) + \big(\Omega^a_3 - (m-2)\big) + \cdots + \big(\Omega^a_m\big) = |\Omega^a| - \Omega^a_1 - \binom{m-1}{2}$$

Hence $\zeta_{\Omega'} - \zeta_{\hat{\Omega}'} = n(\Omega^a/\delta_m) - n(\hat{\Omega}^a/\delta_{m-1})$ since $n(\delta_m) - n(\delta_{m-1}) = \binom{m-1}{2}$ and, as we have seen in the proof of Theorem 4,

$$n(\Omega^a) - n(\hat{\Omega}^a) = |\Omega^a| - \Omega^a_1$$

Supposing by induction that $\zeta_{\hat{\Omega}'} = n(\hat{\Omega}^a/\delta_{m-1})$, we thus have that (154) holds againg in that case. $\square$

We can now give a combinatorial formula for the norm of a Macdonald polynomial in superspace. The formula follows from Theorem 4 and Lemma 4.

PROPOSITION 7. *For any superpartition Λ, we have*

$$\|P_\Lambda\|^2 = q^{|\Lambda^a|} \prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda} \frac{1-q^{a_{\Lambda^*}(s)+1}t^{l_{\Lambda^\circledast}(s)}}{1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1}}. \tag{155}$$

PROOF. By Lemma 4, we get that

$$\|P_\Lambda\|^2 = \frac{1}{b_\Lambda(q,t)} = (-1)^{|\Lambda|+\binom{m}{2}} q^{|\Lambda|} \frac{\Phi^m_\Lambda(u(qt)^{-m};q,t)}{\Phi^m_{\Lambda'}(u;t^{-1},q^{-1})} = (-1)^{|\Lambda|+\binom{m}{2}} q^{|\Lambda|} \frac{\Phi^m_\Lambda(0;q,t)}{\Phi^m_{\Lambda'}(0;t^{-1},q^{-1})} \tag{156}$$

since $\|P_\Lambda\|^2$ does not depend on u. Therefore, by Theorem 4, we have

$$\begin{aligned}\|P_\Lambda\|^2 = (-1)^{|\Lambda|+\binom{m}{2}} q^{|\Lambda|} &\frac{t^{-(m-1)|(\Lambda')^a/\delta_m|+2n((\Lambda')^a/\delta_m)+n(\mathcal{S}\Lambda)}}{q^{(m-1)|\Lambda^a/\delta_m|-2n(\Lambda^a/\delta_m)-n(\mathcal{S}\Lambda')}} \\ &\times \prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda} \frac{-1}{q^{a_{\Lambda^*}(s)+1}t^{l_{\Lambda^\circledast}(s)}} \cdot \frac{1-q^{a_{\Lambda^*}(s)+1}t^{l_{\Lambda^\circledast}(s)}}{1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1}}\end{aligned} \tag{157}$$

given that $a_{\lambda'}(i,j) = l_\lambda(j,i)$ for any cell (i,j) in a partition λ. The number of cells in $\mathcal{B}\Lambda$ is equal to $|\Lambda| - \binom{m}{2}$, which means that the signs cancel out as wanted. It is also straightforward to show that

$$(m-1)|\delta_m| - 2n(\delta_m) - n(\delta_{m+1}) = 0$$

using $|\delta_m| = \binom{m}{2}$ and

$$n(\delta_m) = \sum_{k=1}^{m-1} \binom{k}{2} = \frac{m(m-1)(m-2)}{6}.$$

To obtain (155), we thus only have left to prove that

$$\sum_{s\in\mathcal{B}\Lambda} (a_{\Lambda^*}(s)+1) = n(\Lambda^{\circledast\prime}) + 2n(\Lambda^a) - (m-1)|\Lambda^a| + |\Lambda| - |\Lambda^a| \tag{158}$$

and that

$$\sum_{s\in\mathcal{B}\Lambda} l_{\Lambda^\circledast}(s) = n(\Lambda^\circledast) + 2n((\Lambda')^a) - (m-1)|(\Lambda')^a| \tag{159}$$

We will prove (159) and then deduce (158) from it. First, using $\sum_{s\in\lambda} l_\lambda(s) = n(\lambda)$, we obtain

$$\sum_{s\in\mathcal{B}\Lambda} l_{\Lambda^\circledast}(s) = n(\Lambda^\circledast) - \sum_{s\in\mathcal{F}\Lambda} l_{\Lambda^\circledast}(s) \tag{160}$$

where $\mathcal{F}\Lambda$ are the cells of Λ that have a circle in both their row and their column, that is, the cells in the diagram of Λ that are not in $\mathcal{B}\Lambda$. In order to make sense of $\sum_{s\in\mathcal{F}\Lambda} l_{\Lambda^\circledast}(s)$, it is convenient to add the quantity ζ_Λ defined in Remark 1 to get

$$\sum_{s\in\mathcal{F}\Lambda} l_{\Lambda^{\circledast}}(s)+\zeta_\Lambda = \left[(m-1)(\Lambda')^a_1+(m-2)(\Lambda')^a_2+\cdots+(\Lambda')^a_{m-1}\right]-n(\delta_m)$$
$$= (m-1)|(\Lambda')^a|-n((\Lambda')^a)-n(\delta_m)$$

From Lemma 10, it is then immediate that $\sum_{s\in\mathcal{F}\Lambda} l_{\Lambda^{\circledast}}(s)=(m-1)|(\Lambda')^a|-2n((\Lambda')^a)$. We then see that (159) follows from (160).

Conjugating (159), we obtain that

$$\sum_{s\in\mathcal{B}\Lambda} a_{\Lambda^{\circledast}}(s)=n(\Lambda^{\circledast\prime})+2n(\Lambda^a)-(m-1)|\Lambda^a| \tag{161}$$

Using $\sum_{s\in\mathcal{B}\Lambda} a_{\Lambda^{\circledast}}(s)=\sum_{s\in\mathcal{B}\Lambda} a_{\Lambda^*(s)}+|\Lambda^a|-\binom{m}{2}$, we can conclude that

$$\sum_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(a_{\Lambda^*(s)}+1)=\sum_{s\in\mathcal{B}\Lambda} a_{\Lambda^{\circledast}}(s)+|\Lambda|-|\Lambda^a|$$

which, from (161), implies (158). □

CHAPTER 4

Extensions of the operators D_N^r to superspace

Macdonald proved the Pieri rules for symmetric Macdonald polynomials (see Section 3.7) using a non-trivial symmetry property with respect to a specialization of the variables. The operators D_n^r defined in Section 3.2 play a fundamental role in the proof of this symmetry property. In [**20**], O. Blondeau-Fournier presented a version of the specialization in superspace and conjectured the symmetry property in superspace (see Appendix B for the definitions of the specialization in superspace and the conjecture for the symmetry property in superspace). In this chapter, we present the superspace extension of the operators D_N^r, which consists of two families of operators. Unfortunately, we have not been able to prove that these operators are simultaneously diagonalizable with the Macdonald superpolynomials as common eigenfunctions, which implied that we were also not able to prove the symmetry property in superspace.

1. Operators D_N^r and $\widetilde{D}_N^r$

In this section, we present two kinds of operators D_N^r and $\widetilde{D}_N^r$ acting in $\mathcal{R}(N)$, where N is the number of variables and $r \in \{1, \dots, N\}$. For $i, j \in \{1, 2, \dots, N\}$ we define

$$A_{ij} = \frac{tx_i - x_j}{x_i - x_j},$$
$$\tilde{B}_{ij} = \frac{x_i x_j (1-q)(1-t)}{(qx_i - x_j)(x_i - x_j)} \theta_j (\partial_{\theta_i} - \partial_{\theta_j})$$

and

$$\tilde{C}_{ij} = \frac{x_i x_j (1-q)(1-t)}{(qx_i - x_j)(x_i - x_j)} \theta_j \left(\frac{x_i}{x_j} \partial_{\theta_i} - \partial_{\theta_j} \right)$$

Given $I \subset \{1, \dots, N\}$, for each $(i, j) \in I \times I^c$ we define the homomorphism $\sigma_{i,j}$ defined by:

$$\sigma_{i,j} A_{kl} = A_{kl} \text{ if } j \neq l\,, \quad \sigma_{i,j} A_{kj} = A_{ki} \text{ if } i \neq k\,, \quad \sigma_{i,j} A_{ij} = \tilde{B}_{ij} \quad \text{and} \quad \sigma_{i,j} \tilde{B}_{kl} = \tilde{B}_{kl} \text{ if } j \neq l$$

It is clear that

$$\sigma_{i,j}\, \sigma_{k,l} = \sigma_{k,l}\, \sigma_{i,j} \qquad \text{if } j \neq l.$$

In a similar way, for each $(i, j) \in I \times I^c$, we define the homomorphism $\rho_{i,j}$ by:

$$\rho_{i,j} A_{kl} = A_{kl} \text{ if } j \neq l\,, \quad \rho_{i,j} A_{kj} = A_{ki} \text{ if } i \neq k\,, \quad \rho_{i,j} A_{ij} = \tilde{C}_{ij} \quad \text{and} \quad \rho_{i,j} \tilde{C}_{kl} = \tilde{C}_{kl} \text{ if } j \neq l$$

The operators D_r^N and $\widetilde{D}_r^N$ are then defined as:

$$D_r^N = \sum_{|I|=r} \left[\prod_{j \in I^c} \left(1 + \sum_{i \in I} \sigma_{i,j} \right) \right] A_I \tau_I^x,$$

and

$$\widetilde{D}_r^N = \sum_{|I|=r} \left[\prod_{j\in I^c} \left(1 + \sum_{i\in I} \rho_{i,j} \right) \right] A_I \tau_I^x \tau_I^\theta,$$

where the sum is over all subsets $I \subset \{1,\ldots,N\}$ with $|I| = r$. The operator τ_i^x (simply denoted τ_i in Appendix A) is such that:

$$\tau_i^x : \begin{cases} x_i \mapsto qx_i, \\ x_j \mapsto x_j \ \text{ if } j \neq i, \end{cases} \tag{162}$$

while τ_i^θ acts as

$$\tau_i^\theta : \begin{cases} \theta_i \mapsto q\theta_i, \\ \theta_j \mapsto \theta_j \ \text{ if } j \neq i, \end{cases} \quad . \tag{163}$$

Moreover, $\tau_I^x = \tau_{i_1}^x \tau_{i_2}^x \cdots \tau_{i_k}^x$ for $I = \{i_1,\ldots,i_k\}$, and similarly for τ_I^θ.

Examples:

(1)

$$D_1^2 = (A_{12} + \tilde{B}_{12})\tau_1 + (A_{21} + \tilde{B}_{21})\tau_2.$$

(2)

$$\begin{aligned} D_1^3 = &\left(A_{12}A_{13} + \tilde{B}_{12}A_{13} + A_{12}\tilde{B}_{13} + \tilde{B}_{12}\tilde{B}_{13} \right) \tau_1 + \left(A_{21}A_{23} + \tilde{B}_{21}A_{23} + A_{21}\tilde{B}_{23} + \tilde{B}_{21}\tilde{B}_{23} \right) \tau_2 \\ &+ \left(A_{31}A_{32} + \tilde{B}_{31}A_{32} + A_{31}\tilde{B}_{32} + \tilde{B}_{31}\tilde{B}_{32} \right) \tau_3 \\ &. \end{aligned}$$

(3)

$$\begin{aligned} D_2^3 = &\left(A_{13}A_{23} + \tilde{B}_{13}A_{21} + A_{12}\tilde{B}_{23} \right) \tau_1\tau_2 + \left(A_{21}A_{31} + \tilde{B}_{21}A_{32} + A_{23}\tilde{B}_{31} \right) \tau_2\tau_3 \\ &+ \left(A_{12}A_{32} + \tilde{B}_{12}A_{31} + A_{13}\tilde{B}_{32} \right) \tau_1\tau_3. \end{aligned}$$

The operators $\widetilde{D}_1^2$, $\widetilde{D}_1^3$ and $\widetilde{D}_2^3$ can be obtained by replacing $\tilde{B}_{i,j}$ with $\tilde{C}_{i,j}$ and τ_I^x with $\tau_I^x\tau_I^\theta$ in the expressions above.

CONJECTURE 1. *We have*

$$D_r^N(x,\theta)\Pi(x,\theta,y,\phi;q,t) = D_r^N(y,\phi)\Pi(x,\theta,y,\phi;q,t)$$

where $\Pi(x,\theta,y,\phi;q,t)$ *is the reproducing Kernel.*

The most important consequence of this conjecture would be that the operators D_r^N and D_ℓ^N are simultaneously diagonalizable with the Macdonald superpolynomials as common eigenfunctions.

CHAPTER 5

Multisymmetric Macdonald polynomials

Este capítulo corresponde a uno de los artículos que obtuvimos como resultado de esta tesis. Específicamente, se refiere a la extensión de los dobles polinomios de Macdonald a finitos conjuntos de variables, tal extensión son los que llamamos multi-polinomios de Macdonald. Estos son definidos de la manera usual, o sea a partir de cierta triangularidad y ortogonalidad definida para funciones en un número arbitrario de conjuntos de variables. La existencia de aquellos polinomios se demuestra de manera directa, es decir construimos un polinomio de manera explícita que satisface la triangularidad y ortogonalidad. Esta construcción se hace a partir del producto de polinomios de Macdonald usuales, donde cada uno es evaluado en una combinación no trivial de sumas y productos de los conjuntos de variables. Además se demuestra que los multi polinomios de Macdonald satisfacen algunas propiedades combinatoriales como la norma y la evaluación. Actualmente éste artículo se encuentra sometido.

1. Introduction

Let $n \geq 1$ be a fixed integer. Our goal is to define Macdonald polynomials in the space of multi-symmetric functions in the sets of variables (or alphabets) $x^{(i)} = x_1^{(i)}, x_2^{(i)}, \dots$ of infinite cardinality for i from 1 to n. To be more precise, let a multi-partition be an n-tuple of partitions $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)})$. The space of multi-symmetric function is the $\mathbb{Q}(q,t)$-vector space whose basis is given by the multi-monomial symmetric functions

$$m_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) := m_{\lambda^{(1)}}(x^{(1)}) m_{\lambda^{(2)}}(x^{(2)}) \cdots m_{\lambda^{(n)}}(x^{(n)}) , \tag{164}$$

where $m_\lambda(x)$ is the usual monomial symmetric function (see Section 2 for the basic concepts in symmetric function theory). Observe that the fact that the cardinality of the alphabets is infinite ensures that there are no relations among the multi-monomial symmetric functions. The dominance ordering on multi-partitions is the following: $\boldsymbol{\mu} \leq \boldsymbol{\lambda}$ iff

$$\left(\sum_{i<k} |\mu^{(i)}| \right) + \mu_1^{(k)} + \cdots + \mu_j^{(k)} \leq \left(\sum_{i<k} |\lambda^{(i)}| \right) + \lambda_1^{(k)} + \cdots + \lambda_j^{(k)} \quad \text{for all } j \text{ and } k.$$

Moreover for each multi-partition $\boldsymbol{\lambda} = (\lambda^{(1)}, \lambda^{(2)}, \dots, \lambda^{(n)})$ we associate the composition $\overline{\boldsymbol{\lambda}} := (|\lambda^{(1)}|, |\lambda^{(2)}|, \dots, |\lambda^{(n)}|)$, while for each composition $\alpha \in \mathbb{N}^n$, we let $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_n$ and $n(\alpha) = \sum_i (i-1)\alpha_i$.

Before enunciating our main theorem, we need to define the multi-power sum symmetric functions

$$p_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) := p_{\lambda^{(1)}}(x^{(1)}) p_{\lambda^{(2)}}(x^{(1)}, x^{(2)}) \cdots p_{\lambda^{(n)}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)}) ,$$

where again $p_\lambda(x)$ are the usual power-sum symmetric functions. Observe how intertwined the sets of variables are this time.

The multi-Macdonald polynomials have a triangularity/orthogonality characterization reminiscent of that of the Macdonald polynomials.

Theorem 6. *There exists a unique basis $\{P^{(q,t)}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)})\}_{\boldsymbol{\lambda}}$ such that*

$$1)\quad P^{(q,t)}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)}) = m_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)}) + \text{ lower terms} \tag{165}$$

$$2)\quad \langle\!\langle P^{(q,t)}_{\boldsymbol{\lambda}}, P^{(q,t)}_{\boldsymbol{\mu}}\rangle\!\rangle_{q,t,n} = 0 \quad \text{if} \quad \boldsymbol{\lambda}\neq\boldsymbol{\mu}, \tag{166}$$

where the scalar product is given by

$$\langle\!\langle p_{\boldsymbol{\lambda}}, p_{\boldsymbol{\mu}}\rangle\!\rangle_{q,t,n} = \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} z_{\boldsymbol{\lambda}}(q,t) := \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} q^{(n-1)|\overline{\boldsymbol{\lambda}}|-n(\overline{\boldsymbol{\lambda}})} z_{\lambda^{(1)}}\cdots z_{\lambda^{(n)}} \prod_{i=1}^{\ell(\lambda^{(n)})} \frac{1-q^{\lambda_i^{(n)}}}{1-t^{\lambda_i^{(n)}}}, \tag{167}$$

with $z_\lambda = \prod_{i\ge 1} i^{m_i(\lambda)} m_i(\lambda)!$ if $m_i(\lambda)$ is the number of entries equal to i in the partition λ.

In order to prove the theorem, we actually construct a basis that satisfies the two properties stated in the theorem (the uniqueness follows immediately from the uniqueness of the Gram-Schmidt process when implemented using any linear order compatible with the dominance ordering on multi-partitions). This basis is obtained as a product of usual Macdonald polynomials albeit at very special alphabets.

Proposition 8. *Using the plethystic notation (see Section 2), the multi-Macdonald polynomials can be given explicitly as*

$$P^{(q,t)}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)}) = P^{(q,q^{n-1}t)}_{\lambda^{(1)}}[A_{n-1}]\,P^{(q^{n-1}t,q^{n-2}t)}_{\lambda^{(2)}}[A_{n-2}]\cdots P^{(qt,t)}_{\lambda^{(n)}}[A_0] \tag{168}$$

where the alphabets A_i are defined recursively, starting from $A^{(0)} = X^{(n)}$, as

$$A_i = X^{(n-i)} + \frac{q(1-q^{i-1}t)}{1-q^it}A_{i-1} \tag{169}$$

for $1\le i\le n-1$.

We point out that the case $n=2$ was studied in [**22**], in which case the multi-Macdonald polynomials were called double Macdonald polynomials.

Owing to the factorization (168), we can establish many properties of the multi-Macdonald polynomials. We show that the invariance of the Macdonald polynomials when $q,t\mapsto q^{-1},t^{-1}$ has a natural extension to the multi-Macdonald case (see Proposition 9). We obtain a reproducing kernel for the scalar product (167), as well as explicit formulas for their norm-squared and evaluation. Furthermore, we show that the q,t-Kostka coefficients associated to the multi-Macdonald polynomials are positive and correspond to q,t-analogs of the dimensions of the irreducible representations of $C_n\sim S_d$, the wreath product of the cyclic group C_n with the symmetric group. This suggests that multi-Macdonald polynomials can be considered as wreath product Macdonald polynomials (another construction of wreath product Macdonald polynomials is presented in [**25**]).

2. Basic definitions

We first recall some definitions related to partitions [**1**]. A partition $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \dots)$ of degree $|\lambda|$ is a vector of non-negative integers such that $\lambda_i \geq \lambda_{i+1}$ for $i = 1, 2, \dots$ and such that $\sum_i \lambda_i = |\lambda|$. The length $\ell(\lambda)$ of λ is the number of non-zero entries of λ. Each partition λ has an associated Ferrers' diagram with λ_i lattice squares in the i^{th} row, from the top to bottom. Any lattice square in the Ferrers diagram is called a cell (or simply a square), where the cell (i, j) is in the ith row and jth column of the diagram. The conjugate λ' of a partition λ is represented by the diagram obtained by reflecting λ about the main diagonal. Given a cell $s = (i, j)$ in λ, we let

$$a_\lambda(s) = \lambda_i - j\,, \qquad l_\lambda(s) = \lambda'_j - i \qquad a'_\lambda(s) = j - 1 \qquad \text{and} \qquad l'_\lambda(s) = i - 1. \tag{170}$$

The quantities $a_\lambda(s)$ and $a'_\lambda(s)$ are respectively called the arm-length and the arm-colength while $l_\lambda(s)$ and $l'_\lambda(s)$ are respectively called the leg-length and the leg-colength.

The dominance ordering on partitions is defined such that

$$\mu \leq \lambda \qquad \text{iff} \qquad \mu_1 + \cdots + \mu_k \leq \lambda_1 + \cdots + \lambda_k \quad \forall k$$

Before defining the Macdonald polynomials, we need to introduce two bases of the ring of symmetric functions. For $x = x_1, x_2, \dots, x_N$, the monomial symmetric functions are such that

$$m_\lambda(x) = \sum_\alpha x_1^{\alpha_1} \cdots x_N^{\alpha_N}$$

where the sum is over all distinct permutations α of $(\lambda_1, \dots, \lambda_N)$ (if necessary, a string of 0's is added at the end of λ). In the following we shall always consider that N is infinite. Using the i^{th} power-sum

$$p_i(x) = x_1^i + x_2^i + \cdots$$

the power-sum basis is then simply defined as

$$p_\lambda(x) = \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} p_{\lambda_i}(x)$$

For our purposes, the ring of symmetric functions will be simply taken as the ring $\Lambda_{\mathbb{K}} = \mathbb{K}[p_1(x), p_2(x), \dots]$ over any field $\mathbb{K}$.

The Macdonald polynomials $\{P_\lambda^{(q,t)}(x)\}_\lambda$ depend on two parameters q and t and form the unique basis of the ring $\Lambda_{\mathbb{Q}(q,t)}$ (in the remainder of the article, $\mathbb{K}$ will always be equal to $\mathbb{Q}(q,t)$) such that

$$1) \quad P_\lambda^{(q,t)}(x) = m_\lambda(x) + \text{ lower terms} \tag{171}$$

$$2) \quad \langle\langle P_\lambda^{(q,t)}, P_\mu^{(q,t)} \rangle\rangle_{q,t} = 0 \quad \text{if} \quad \lambda \neq \mu, \tag{172}$$

where the scalar product is given on the power-sums by

$$\langle\langle p_\lambda, p_\mu \rangle\rangle_{q,t} = \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda(q,t) := \delta_{\lambda,\mu} z_\lambda \prod_{i=1}^{\ell(\lambda)} \frac{1 - q^{\lambda_i}}{1 - t^{\lambda_i}}, \tag{173}$$

with z_λ defined in Theorem 6. The existence of the Macdonald poplynomials is non-trivial and follows from the construction of a difference operator D (the Macdonald operator) whose eigenvectors are the Macdonald polynomials.

It will prove very convenient for our purposes to use the language of λ-rings (or plethysms). The power-sum p_i acts on the ring of rational formal power series in $q, t, x_1, x_2, \dots$ with coefficient in the field $\mathbb{Q}$ as

$$p_i \left[\frac{\sum_\alpha c_\alpha u_\alpha}{\sum_\beta d_\beta v_\beta} \right] = \frac{\sum_\alpha c_\alpha u_\alpha^i}{\sum_\beta d_\beta v_\beta^i},$$

where $c_\alpha, d_\beta \in \mathbb{Q}$ and where u_α, v_β are monomials in $q, t, x_1, x_2, \dots$. Since the power-sums form a basis of the ring of symmetric functions, this extends uniquely to an action of the ring of symmetric functions on the ring of rational formal power series in $q, t, x_1, x_2, \dots$. In this notation, a symmetric function $f(x)$ is denoted $f[X]$, where $X = x_1 + x_2 + \cdots$. Similarly, letting $X^{(i)} = x_1^{(i)} + x_2^{(i)} + \cdots$ for $i = 1, \dots, n$, the multi-symmetric functions $m_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ and $p_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \dots, x^{(n)})$ will for instance be respectively denoted $m_{\boldsymbol{\lambda}}[X^{(1)}, X^{(2)}, \dots, X^{(n)}]$ and $p_{\boldsymbol{\lambda}}[X^{(1)}, X^{(1)} + X^{(2)}, \dots, X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}]$.

3. Proof of Proposition 8

As previously mentioned, the case $n = 2$ was studied in [**22**]. The proof relied in this case on the following lemma that will again prove crucial in this article.

Lemma 11 ([**22**]). *In the case $n = 2$, the scalar product $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{q,t,2}$ is identical to the scalar product $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t,2}$ defined as*

$$\big\langle\, p_{\boldsymbol{\lambda}} [A_1, A_0] \,, p_{\boldsymbol{\mu}} [A_1, A_0] \,\big\rangle_{q,t,2} := \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} q^{|\lambda^{(1)}|} z_{\lambda^{(1)}}(q, qt) z_{\lambda^{(2)}}(qt, t) \tag{174}$$

or, more explicitly, as

$$\Big\langle\, p_{\lambda^{(1)}} \left[X^{(1)} + \frac{q(1-t)}{(1-qt)} X^{(2)} \right] p_{\lambda^{(2)}} \left[X^{(2)} \right], p_{\mu^{(1)}} \left[X^{(1)} + \frac{q(1-t)}{(1-qt)} X^{(2)} \right] p_{\mu^{(2)}} \left[X^{(2)} \right] \Big\rangle_{q,t,2}$$
$$:= \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} q^{|\lambda^{(1)}|} z_{\lambda^{(1)}}(q, qt) z_{\lambda^{(2)}}(qt, t) \tag{175}$$

The lemma has the following analog in the multi-Macdonald case.

Lemma 12. *the scalar product $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{q,t,n}$ is equal to the scalar product defined by*

$$\big\langle\, p_{\boldsymbol{\lambda}} [A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0] \,, p_{\boldsymbol{\mu}} [A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0] \,\big\rangle_{q,t,n}$$
$$:= \delta_{\boldsymbol{\lambda},\boldsymbol{\mu}} q^{(n-1)|\overline{\boldsymbol{\lambda}}| - n(\overline{\boldsymbol{\lambda}})} z_{\lambda^{(1)}}(q, q^{n-1}t) z_{\lambda^{(2)}}(q^{n-1}t, q^{n-2}t) \cdots z_{\lambda^{(n)}}(qt, t) \tag{176}$$

Proof: The lemma amounts to showing that $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{q,t,n}$ is equal to the scalar product

$$\big\langle\, p_{\boldsymbol{\lambda}} [A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0] \,, p_{\boldsymbol{\mu}} [A_{n-1}, A_{n-2}, \dots, A_0] \,\big\rangle_{q,t,n}$$
$$:= q^{(n-1)|\overline{\boldsymbol{\lambda}}| - n(\overline{\boldsymbol{\lambda}})} \big\langle p_{\lambda^{(1)}}[A_{n-1}] \,,\, p_{\mu^{(1)}}[A_{n-1}] \big\rangle_{q,q^{n-1}t} \prod_{i=2}^{n} \big\langle p_{\lambda^{(i)}}[A_{n-i}] \,,\, p_{\mu^{(i)}}[A_{n-i}] \big\rangle_{q^{n-i+1}t, q^{n-i}t} \tag{177}$$

where by abuse of notation we always consider that $\big\langle p_\lambda[Z] \,,\, p_\mu[Z] \big\rangle_{q,t} = \delta_{\lambda\mu} z_\lambda(q,t)$ for any alphabet Z (which in our case corresponds to $Z = A_0, \dots, A_{n-1}$).

We will proceed by induction starting from the case $n = 2$ which is covered by Lemma 11. For the general case $n > 2$, we decompose the scalar product (177) as

$$\begin{aligned}\big\langle p_{\boldsymbol{\lambda}}\left[A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0\right], p_{\boldsymbol{\mu}}\left[A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0\right] \big\rangle_{q,t,n} &= \big\langle p_{\lambda^{(n)}}\left[A_0\right], p_{\mu^{(n)}}\left[A_0\right] \big\rangle_{qt,t} \\ \times q^{|\lambda^{(1)}|+\cdots+|\lambda^{(n-1)}|}\big\langle p_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}\left[A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1\right], p_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}\left[A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_1\right] \big\rangle_{q,qt,n-1}\end{aligned} \tag{178}$$

where $\hat{\boldsymbol{\lambda}} = (\lambda^{(1)}, \ldots, \lambda^{(n-1)})$. Since the q-power is constant on multi-partitions $\hat{\boldsymbol{\lambda}}$ of the same total degree, we can use induction to write

$$\begin{aligned}\big\langle p_{\boldsymbol{\lambda}}\left[A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0\right], p_{\boldsymbol{\mu}}\left[A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0\right] \big\rangle_{q,t,n} &= \big\langle p_{\lambda^{(n)}}\left[A_0\right], p_{\mu^{(n)}}\left[A_0\right] \big\rangle_{qt,t} \\ \times q^{|\lambda^{(1)}|+\cdots+|\lambda^{(n-1)}|}\langle\!\langle p_{\hat{\boldsymbol{\lambda}}}\left[Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-2)}, Z\right], p_{\hat{\boldsymbol{\mu}}}\left[Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-2)}, Z\right]\rangle\!\rangle_{q,qt,n-1}\end{aligned} \tag{179}$$

where $Y^{(i)} = X^{(1)} + \cdots + X^{(i)}$ and $Z = Y^{(n-1)} + q(1-t)X^{(n)}/(1-qt) = Y^{(n-2)} + A_1$. By the expression for the scalar product (167), the part that depends on the alphabets $A_0 = X^{(n)}$ and Z and on the partitions $\lambda^{(n-1)}$ and $\lambda^{(n)}$ yields

$$\begin{aligned}q^{|\lambda^{(n-1)}|}\big\langle p_{\lambda^{(n-1)}}\left[Z\right], p_{\mu^{(n-1)}}\left[Z\right] \big\rangle_{q,qt}\big\langle p_{\lambda^{(n)}}\left[X^{(n)}\right], p_{\mu^{(n)}}\left[X^{(n)}\right] \big\rangle_{qt,t} \\ = \langle\!\langle p_{\lambda^{(n-1)}}[Y^{(n-1)}]p_{\lambda^{(n)}}[Y^{(n)}], p_{\mu^{(n-1)}}[Y^{(n-1)}]p_{\mu^{(n)}}[Y^{(n)}] \rangle\!\rangle_{q,t,2}\end{aligned} \tag{180}$$

from Lemma 11 (observe that we used the fact that the q-power appearing in $\langle\!\langle \cdot, \cdot \rangle\!\rangle_{q,qt,n-1}$ does not depend on $\lambda^{(n-1)}$ and $\lambda^{(n)}$). Hence

$$\big\langle p_{\boldsymbol{\lambda}}\left[A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0\right], p_{\boldsymbol{\mu}}\left[A_{n-1}, A_{n-2}, \ldots, A_0\right] \big\rangle_{q,t,n}$$

$$= q^{(n-1)|\overline{\boldsymbol{\lambda}}|-n(\overline{\boldsymbol{\lambda}})} z_{\lambda^{(1)}} z_{\lambda^{(2)}} \cdots z_{\lambda^{(n-1)}} z_{\lambda^{(n)}}(q,t) \tag{181}$$

$$= \langle\!\langle p_{\boldsymbol{\lambda}}\left[Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}, Y^{(n)}\right], p_{\boldsymbol{\mu}}\left[Y^{(1)}, \ldots, Y^{(n-1)}, Y^{(n)}\right]\rangle\!\rangle_{q,t,n} \tag{182}$$

which proves the lemma.

□

Proof of Proposition 8: We have to show that the expression given in (168) satisfies the triangularity and the orthogonality in Theorem 6. The orthogonality is an immediate consequence of Lemma 12 since the scalar product is a product of usual Macdonald scalar products (173) at the right alphabets (the extra q-power does not affect the orthogonality since it only depends on the degree of the components of the multi-partition).

We now consider the triangularity. Suppose by induction that the triangularity in the monomial basis holds in the case when there are $n-1$ sets of alphabets (the base case $n = 1$ is the usual Macdonald case), i.e.

$$P_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}^{(q,t)} = \sum_{\tilde{\boldsymbol{\mu}} \leq \tilde{\boldsymbol{\lambda}}} * \, m_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(x^{(2)}, \ldots, x^{(n)}) \tag{183}$$

where we use the tilde in $\tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ to emphasize that the multi-partition has $n-1$ components instead of n, and where, for simplicity, we use $*$ to denote the expansion coefficients (instead of for instance the more cumbersome $c_{\tilde{\boldsymbol{\lambda}},\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(q,t)$).

For the case with n alphabets, we need to analyse the extra factor $P^{(q^nt,q^{n-1}t)}_{\lambda^{(1)}}[A_{n-1}]$. It is triangular, from (171), in the monomial basis

$$P^{(q^nt,q^{n-1}t)}_{\lambda^{(1)}}[A_{n-1}] = \sum_{\nu^{(1)}\leq\lambda^{(1)}} * \, m_{\nu^{(1)}}[A_{n-1}]$$

We now have to expand $m_{\nu^{(1)}}[A_{n-1}]$ in the $m_{\boldsymbol{\mu}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)})$ basis. Using the notation $(\mu,\nu)\subseteq\lambda$ to denote $\mu\subseteq\lambda$ and $\nu\subseteq\lambda$ (the same notation will be used in the general case with more than two components), we have

$$\begin{aligned}
m_{\nu^{(1)}}\left[X^{(1)}+\frac{q-q^{n-1}t}{1-q^{n-1}t}A_{n-2}\right] &= \sum_{|(\rho^{(1)},\gamma)|=|\nu^{(1)}|\,:\,(\rho^{(1)},\gamma)\subseteq\nu^{(1)}} m_{\rho^{(1)}}[X_1]m_\gamma\left[\frac{q-q^{n-1}t}{1-q^{n-1}t}A_{n-2}\right]\\
&= \sum_{|(\rho^{(1)},\sigma)|=|\nu^{(1)}|\,:\,\rho^{(1)}\subseteq\nu^{(1)}} * \, m_{\rho^{(1)}}[X^{(1)}]m_\sigma[A_{n-2}]
\end{aligned}$$

where $|(\mu,\nu)|=|\mu|+|\nu|$. Repeating this argument again and again, we obtain

$$m_{\nu^{(1)}}[A_{n-1}] = \sum_{|\boldsymbol{\rho}|=|\nu^{(1)}|\,:\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\subseteq\nu^{(1)}} m_{\boldsymbol{\rho}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)})$$

where, as before, $\hat{\boldsymbol{\rho}}=(\rho^{(1)},\dots,\rho^{(n-1)})$. Hence, we have

$$P^{(q,t)}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)}) = \sum_{\nu^{(1)}\leq\lambda^{(1)}}\sum_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}\leq\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}\sum_{|\boldsymbol{\rho}|=|\nu^{(1)}|\,:\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\subseteq\nu^{(1)}} * \, m_{\boldsymbol{\rho}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)})\, m_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}}(x^{(2)},\dots,x^{(n)})$$

It is known that

$$m_\mu[X]\,m_\nu[X] = m_{\mu+\nu}[X] + \sum_{\sigma<\mu+\nu} * \, m_\sigma[X],$$

where $\mu+\nu=(\mu_1+\nu_1,\mu_2+\nu_2,\dots)$. Therefore

$$P^{(q,t)}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)}) = \sum_{\nu^{(1)}\leq\lambda^{(1)}}\sum_{\tilde{\boldsymbol{\mu}}\leq\tilde{\boldsymbol{\lambda}}}\sum_{|\boldsymbol{\rho}|=|\nu^{(1)}|\,:\,\hat{\boldsymbol{\rho}}\subseteq\nu^{(1)}}\sum_{\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\preceq\tilde{\boldsymbol{\rho}}+\tilde{\boldsymbol{\mu}},\sigma^{(1)}=\rho^{(1)}} * \, m_{\boldsymbol{\sigma}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)})$$

where $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\preceq\tilde{\boldsymbol{\rho}}+\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ stands for $\sigma^{(2)}\leq\rho^{(2)}+\mu^{(2)},\dots,\sigma^{(n)}\leq\rho^{(n)}+\mu^{(n)}$.

We will now see that the conditions on the summation indices in the previous equation imply that $\boldsymbol{\sigma}\leq\boldsymbol{\lambda}$. From $\sigma^{(1)}=\rho^{(1)}$, $\rho^{(1)}\subseteq\nu^{(1)}$ and $\nu^{(1)}\leq\lambda^{(1)}$, we first deduce that

$$\sum_{i=1}^k\sigma_i^{(1)} = \sum_{i=1}^k\rho_i^{(1)} \leq \sum_{i=1}^k\nu_i^{(1)} \leq \sum_{i=1}^k\lambda_i^{(1)} \tag{184}$$

We then let $2\leq\ell\leq n$ and use $\sigma^{(1)}=\rho^{(1)}$ as well as $\tilde{\boldsymbol{\sigma}}\preceq\tilde{\boldsymbol{\rho}}+\tilde{\boldsymbol{\mu}}$ to obtain

$$\begin{aligned}
&|\sigma^{(1)}|+\cdots+|\sigma^{(\ell-1)}|+\sum_{i=1}^k\sigma_i^{(\ell)}\\
&\qquad\leq|\rho^{(1)}|+\left(|\rho^{(2)}|+|\mu^{(2)}|\right)+\cdots+\left(|\rho^{(\ell-1)}|+|\mu^{(\ell-1)}|\right)+\sum_{i=1}^k\left(\rho_i^{(\ell)}+\mu_i^{(\ell)}\right)
\end{aligned} \tag{185}$$

Then, using $|\boldsymbol{\rho}| = |\nu^{(1)}|$ followed by $\tilde{\boldsymbol{\mu}} \leq \tilde{\boldsymbol{\lambda}}$ and $|\nu^{(1)}| = |\lambda^{(1)}|$, we get that

$$|\sigma^{(1)}| + \cdots + |\sigma^{(\ell-1)}| + \sum_{i=1}^{k} \sigma_i^{(\ell)} \leq |\nu^{(1)}| + |\mu^{(2)}| + \cdots + |\mu^{(\ell-1)}| + \sum_{i=1}^{k} \mu_i^{(\ell)}$$
$$\leq |\lambda^{(1)}| + |\lambda^{(2)}| + \cdots + |\lambda^{(\ell-1)}| + \sum_{i=1}^{k} \lambda_i^{(\ell)} \tag{186}$$

which proves the triangularity.

□

4. Properties of multi-Macdonald polynomials

We now establish the properties of the Macdonald polynomials that extend to the multi-Macdonald case.

4.1. Sending $q \mapsto q^{-1}$ and $t \mapsto t^{-1}$. The Macdonald polynomials safisfy the following property [**1**]

$$P_\lambda^{(q^{-1},t^{-1})}(x) = P_\lambda^{(q,t)}(x). \tag{187}$$

The generalization of that property to the multi-Macdonald case is the following.

Proposition 9. *Using the plethystic notation, the multi-Macdonald polynomials are such such that*

$$P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q^{-1},t^{-1})}[X^{(1)}, X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}] = q^{n(\overline{\boldsymbol{\lambda}})-(n-1)|\overline{\boldsymbol{\lambda}}|} P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}[q^{n-1}X^{(1)}, q^{n-2}X^{(2)}, \ldots, X^{(n)}]$$

If f is a multi-symmetric function, we define the homomorphism φ as

$$\varphi(f[X^{(1)}, \ldots, X^{(i)}, \ldots, X^{(n)})] = f[q^{n-1}X^{(1)}, \ldots, q^{n-i}X^{(i)}, \ldots, X^{(n)}].$$

In order to prove the proposition, we first prove the following lemma:

Lemma 13. *The alphabets $A_i := A_i(q,t)$ defined recursively in* (169) *are such that*

$$\varphi\big(A_i(q,t)\big) = q^i A_i(q^{-1}, t^{-1})\,. \tag{188}$$

Proof: We proceed induction. The result holds trivially in the base case A_0 given that $A_0 = X^{(n)}$. Supposing that

$$\varphi\big(A_i(q,t)\big) = q^i A_i(q^{-1}, t^{-1})$$

we then get

$$\varphi\big(A_{i+1}(q,t)\big) = q^{i+1} X^{(n-(i+1))} + \frac{q(1-q^i t)}{1-q^{i+1}t} \cdot q^i A_i(q^{-1}, t^{-1})$$
$$= q^{i+1}\Big(X^{(n-(i+1))} + \frac{q^{-1}(1-q^{-i}t^{-1})}{1-q^{-i-1}t^{-1}} \cdot A_i(q^{-1}, t^{-1})\Big) = q^{i+1} A_{i+1}(q^{-1}, t^{-1})$$

which proves the lemma.

□

Proof of Proposition 9: Using (187), the explicit form (168) of the multi-Macdonald polynomial and the previous lemma, we have

$$\begin{aligned} &P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q^{-1},t^{-1})}[X^{(1)},X^{(2)},\ldots,X^{(n)}] \\ &\quad= P_{\lambda^{(1)}}^{(q,q^{n-1}t)}\left[A_{n-1}(q^{-1},t^{-1})\right] P_{\lambda^{(2)}}^{(q^{n-1}t,q^{n-2}t)}\left[A_{n-2}(q^{-1},t^{-1})\right]\cdots P_{\lambda^{(n)}}^{(qt,t)}\left[A_0(q^{-1},t^{-1})\right] \\ &\quad= P_{\lambda^{(1)}}^{(q,q^{n-1}t)}\left[q^{-n+1}\varphi(A_{n-1})\right] P_{\lambda^{(2)}}^{(q^{n-1}t,q^{n-2}t)}\left[q^{-n+2}\varphi(A_{n-2})\right]\cdots P_{\lambda^{(n)}}^{(qt,t)}\left[\varphi(A_0)\right] \end{aligned}$$

Using the homogeneity of the Macdonald polynomials (which implies that $P_\lambda^{(q,t)}[q^aX] = q^{a|\lambda|}P_\lambda^{(q,t)}[X]$) and the fact that φ is a homomorphism, we then get

$$P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q^{-1},t^{-1})}[X^{(1)},X^{(2)},\ldots,X^{(n)}] = q^{n(\bar{\boldsymbol{\lambda}})-(n-1)|\bar{\boldsymbol{\lambda}}|}\varphi\big(P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}[X^{(1)},X^{(2)},\ldots,X^{(n)}]\big)$$

This proves the proposition.

□

4.2. Norm. As we will see, the explicit form (168) of a multi-Macdonald polynomial leads to an explicit expression for its norm-squared $||P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}||^2_{q,t,n} := \langle\!\langle P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}, P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}\rangle\!\rangle_{q,t,n}$. First, recall that Macdonald polynomials are such that [**1**]

$$\langle\!\langle P_\lambda^{(q,t)}, P_\lambda^{(q,t)}\rangle\!\rangle_{q,t} = b_\lambda(q,t) \tag{189}$$

where

$$b_\lambda(q,t) = \prod_{s\in\lambda}\frac{1-q^{a(s)}t^{l(s)+1}}{1-q^{a(s)+1}t^{l(s)}}.$$

with $a(s)=a_\lambda(s)$ and $l(s)=l_\lambda(s)$ such as defined in Section 2.

Using (168), the explicit formula for the norm-squared of the Macdonald polynomials implies from Lemma 12 a similar expression for the norm-squared of the multi-Macdonald polynomials.

Corollary 3. *The Multi-Macdonald polynomial $P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})$ is such that:*

$$||P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}||^2_{q,t,n} = q^{(n-1)|\bar{\boldsymbol{\lambda}}|-n(\bar{\boldsymbol{\lambda}})} b_{\lambda^{(1)}}(q,q^{n-1}t)^{-1} b_{\lambda^{(2)}}(q^{n-1}t,q^{n-2}t)^{-1}\cdots b_{\lambda^{(n)}}(qt,t)^{-1}$$

4.3. Kernel. The Macdonald polynomial scalar product has the following reproducing kernel

$$K(x,y;q,t) = \prod_{i,j}\frac{(tx_iy_j;q)_\infty}{(x_iy_j;q)_\infty} \tag{190}$$

where x (resp. y) stands for $x_1,x_2,x_3,\ldots$ (resp. $y_1,y_2,y_3,\ldots$) and where

$$(a;q)_\infty = \prod_{i=0}^{\infty}(1-q^ia)$$

Being a reproducing kernel, $K(x,y;q,t)$ is such that

$$K(x,y;q,t) = \sum_\lambda \frac{1}{z_\lambda(q,t)}p_\lambda(x)p_\lambda(y) \tag{191}$$

We now extend this result to the multi-Macdonald case. For each $k\in\{1,\ldots,n\}$, let $\boldsymbol{x}^{(k)}$ (resp. $\boldsymbol{y}^{(k)}$) be the union of the alphabets $x^{(1)},x^{(2)},\ldots,x^{(k)}$ (resp. $y^{(1)},y^{(2)},\ldots,y^{(k)}$);

to simplify the notation, when $k=n$ we write $\boldsymbol{x}$ (resp. $\boldsymbol{y}$) instead of $\boldsymbol{x}^{(n)}$(resp. $\boldsymbol{y}^{(n)}$). Even though, the alphabets $x^{(1)}, x^{(2)}, \ldots, x^{(k)}$ are infinite, the alphabet $\boldsymbol{x}^{(k)}$ is countably infinite and we will suppose that its elements are ordered as $\boldsymbol{x}_1^{(k)}, \boldsymbol{x}_2^{(k)}, \ldots$ (the order is irrelevant). Now, let

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};q,t)=\prod_{i,j}\frac{(t\boldsymbol{x}_i\boldsymbol{y}_j;q)_\infty}{(\boldsymbol{x}_i,\boldsymbol{y}_j;q)_\infty}\prod_{k=1}^{n-1}\prod_{i,j}\frac{1}{1-q^{-(n-k)}\boldsymbol{x}_i^{(k)}\boldsymbol{y}_j^{(k)}}$$

Proposition 10. *We have that*

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};q,t)=\sum_{\boldsymbol{\lambda}}\frac{1}{z_{\boldsymbol{\lambda}}(q,t)}p_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})p_{\boldsymbol{\lambda}}(y^{(1)},\ldots,y^{(n)})$$

where $z_{\boldsymbol{\lambda}}(q,t)$ was defined in (167). As such, $K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};q,t)$ is a reproducing kernel for the scalar product (167), which implies in particular

$$K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};q,t)=\sum_{\boldsymbol{\lambda}}\frac{1}{||P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}||_{q,t,n}^2}P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}(y^{(1)},\ldots,y^{(n)}) \tag{192}$$

where $||P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}||_{q,t,n}^2$ is given explicitly in Corollary 3.

Proof: Recall that the Cauchy identity is such that [**1**]

$$\prod_{i,j}\frac{1}{1-x_iy_j}=\sum_{\lambda}\frac{1}{z_\lambda}p_\lambda(x)p_\lambda(y)$$

By homogeneity, the Cauchy identity is easily seen to be such that

$$\prod_{i,j}\frac{1}{1-ux_iy_j}=\sum_{\lambda}\frac{1}{z_\lambda}u^{|\lambda|}p_\lambda(x)p_\lambda(y)$$

The proposition then follows from (191) since

$$\begin{aligned}K(\boldsymbol{x},\boldsymbol{y};q,t)=&\left(\sum_{\lambda^{(n)}}z_{\lambda^{(n)}}(q,t)^{-1}p_{\lambda^{(n)}}(\boldsymbol{x})p_{\lambda^{(n)}}(\boldsymbol{y})\right)\left(\sum_{\lambda^{(n-1)}}z_{\lambda^{(n-1)}}^{-1}q^{-|\lambda^{(n-1)}|}p_{\lambda^{(n-1)}}(\boldsymbol{x}^{(n-1)})p_{\lambda^{(n-1)}}(\boldsymbol{y}^{(n-1)})\right)\\&\times\cdots\times\left(\sum_{\lambda^{(1)}}z_{\lambda^{(1)}}^{-1}q^{-(n-1)|\lambda^{(1)}|}p_{\lambda^{(1)}}(\boldsymbol{x}^{(1)})p_{\lambda^{(1)}}(\boldsymbol{y}^{(1)})\right)\\=&\sum_{\boldsymbol{\lambda}}z_{\boldsymbol{\lambda}}(q,t)^{-1}p_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)})p_{\boldsymbol{\lambda}}(y^{(1)},\ldots,y^{(n)})\end{aligned}$$

□

4.4. Specializations. We now describe the various specializations of the multi-Macdonald polynomials presented in the figure below.

$$\begin{tikzcd}
 & P_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};q,t) \arrow[dl, "q\to 0"'] \arrow[d, "t\to 1"', "q=t^{\alpha}"] \arrow[dr, "q\to\infty"] & \\
P_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};t) \arrow[d, "t\to 0"'] & P_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};\alpha) \arrow[d, "\alpha\to 1"] & \bar{P}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};1/t) \arrow[d, "t\to\infty"] \\
s_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}) & s^{\mathrm{Jack}}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}) & \overline{s}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}) \\
 & s_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};t) \arrow[ul, "t\to 0"] \arrow[u, "t\to 1"] \arrow[ur, "t\to\infty"'] &
\end{tikzcd}$$

Multi-Jack polynomials: The Multi-Jack polynomias are simply products of usual Jack polynomials $P_\lambda^{(\alpha)}$ by taking the limit $q=t^\alpha$, $t\to 1$ in (168). To be more explicit, we let the alphabets B_i be defined recursively as

$$B_i = X^{(n-i)} + \frac{\alpha(i-1)+1}{\alpha i+1} B_{i-1}$$

(starting from $B_0 = X^{(n)}$). We then get

$$P^{(\alpha)}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}) = P^{(\alpha_{n-1})}_{\lambda^{(1)}}[B_{n-1}]P^{(\alpha_{n-2})}_{\lambda^{(2)}}[B_{n-2}]\cdots P^{(\alpha_0)}_{\lambda^{(n)}}[B_0]$$

where, for $k=0,\ldots,n-1$, we have

$$\alpha_k = \begin{cases} \dfrac{\alpha}{\alpha(n-1)+1} & \text{if } k=n-1 \\[2ex] \dfrac{\alpha(k+1)+1}{\alpha k+1} & \text{otherwise} \end{cases}$$

Multi-Hall Littlewood polynomials: It is known [**1**] that $P_\lambda^{(0,0)}(x) = s_\lambda(x)$ is a Schur function and that $P_\lambda^{(0,t)}(x) = P_\lambda(x;t)$ is a Hall-Littlewood polynomial. Now, when letting $q=0$ in (169), the recursion trivializes and we get $A_i = X^{(n-i)}$. Hence, we get from (168) that

$$P_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)};t) = s_{\lambda^{(1)}}(x^{(1)})s_{\lambda^{(2)}}(x^{(2)})\cdots s_{\lambda^{(n-1)}}(x^{(n-1)})P_{\lambda^{(n)}}(x^{(n)};t),$$

When $q\to\infty$, it is straightforward to obtain that the alphabets A_i in (169) become

$$C_i = \lim_{q\to\infty} A_{n-i} = X^{(i)} + X^{(i+1)} + \cdots + X^{(n-1)} + (1-1/t)X^{(n)}$$

for $i = 1, \ldots, n-1$, while A_0 remains equal to $X^{(n)}$. Hence, we have

$$\bar{P}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}; 1/t) = s_{\lambda^{(1)}}[C_1]\, s_{\lambda^{(2)}}[C_2] \cdots\, s_{\lambda^{(n-1)}}[C_{n-1}] P_{\lambda^{(n)}}(x^{(n)}; 1/t)$$

since $P_\lambda^{(\infty,t)}(x) = P_\lambda(x; 1/t)$.

Multi-Schur functions: When setting $q = t$, the dependency over t does not disappear (contrary to the Macdonald case) and we obtain a family of multi-Schur functions $s_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}; t)$ depending on t.

Setting $q = t$ in (169), the recursion becomes

$$A_i = X^{(n-i)} + \frac{t(1-t^i)}{1-t^{i+1}} A_{i-1}$$

which implies that

$$A_i = \sum_{k=0}^{i} \frac{t^{i-k}(1-t^{k+1})}{1-t^{i+1}} X^{(n-k)} \tag{193}$$

in this case. Letting $D_i = A_i$ as above, we have from (168) that

$$s_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}; t) = P_{\lambda^{(1)}}^{(t,t^n)}[D_{n-1}] P_{\lambda^{(2)}}^{(t^n,t^{n-1})}[D_{n-2}] \cdots P_{\lambda^{(n)}}^{(t^2,t)}[D_0] \tag{194}$$

We stress that the specializations of the Macdonald polynomials appearing in the previous product have not, to the best of our knowledge, been studied and do not appear to have any special properties.

We now describe in more details the specializations $t = 1$, $t = 0$ and $t = \infty$ of the multi-Schur functions. Taking the limit $t \to 1$ in (193), and setting

$$E_i = \sum_{k=0}^{i} \frac{k+1}{i+1} X^{(n-k)}$$

we obtain from (194) that

$$s_{\boldsymbol{\lambda}}^{\text{Jack}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = P_{\lambda^{(1)}}^{(1/n)}[E_{n-1}] P_{\lambda^{(2)}}^{(n/n-1)}[E_{n-2}] \cdots P_{\lambda^{(n-1)}}^{(3/2)}[E_1] P_{\lambda^{(n)}}^{(2)}[E_0]$$

Note that this is a product of Jack polynomials at special values of α.

Taking the limit $t \to 0$ in (193) and (194), we get

$$s_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = s_{\lambda^{(1)}}(x^{(1)}) s_{\lambda^{(2)}}(x^{(2)}) \cdots s_{\lambda^{(n)}}(x^{(n)}) \tag{195}$$

These multi-Schur functions will be used later in Subsection 4.6 when studying the multi q,t-Kostka coefficients.

Finally, taking the limit $t \to \infty$ in (193) and (194), we obtain

$$\bar{s}_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = s_{\lambda^{(1)}}[X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}] s_{\lambda^{(2)}}[X^{(2)} + \cdots + X^{(n)}] \cdots s_{\lambda^{(n)}}[X^{(n)}]$$

4.5. Evaluation. Recall [**1**] that the evaluation of a symmetric polynomials is a homomorphism defined on the power-sum symmetric function p_r as

$$\varepsilon_{u,t}(p_r) = \frac{1-u^r}{1-t^r},$$

where u is an indeterminate. In the plethystic notation, it simply corresponds to p_r acting on the alphabet $(1-u)/(1-t)$:

$$p_r\left[\frac{1-u}{1-t}\right]=\frac{1-u^r}{1-t^r}.$$

It is known that the evaluation of a Macdonald polynomial is given by

$$P_\lambda^{(q,t)}\left[\frac{1-u}{1-t}\right]=\prod_{s\in\lambda}\frac{t^{l'(s)}-q^{a'(s)}u}{1-q^{a(s)}t^{l(s)+1}}=:w_\lambda(u;q,t). \tag{196}$$

For multi-symmetric polynomials, we define the evaluation by

$$E_{\boldsymbol{u},q,t}(m_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\ldots,x^{(n)}))=m_{\boldsymbol{\lambda}}[\mathcal{X}^{(1)},\ldots,\mathcal{X}^{(n)}]$$

where, for the indeterminates $u_1,\ldots,u_n$, we have

$$\mathcal{X}^{(i)}=q^{n-i}u_1\cdots u_{i-1}\left(\frac{1-u_i}{1-q^{n-i}t}\right)$$

and where it is understood that

$$p_r\left[\mathcal{X}^{(i)}\right]=q^{(n-i)r}u_1^r\cdots u_{i-1}^r\left(\frac{1-u_i^r}{1-q^{(n-i)r}t^r}\right) \tag{197}$$

Proposition 11. *The evaluation of the multi-Macdonald polynomial $P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}$ is given by*

$$E_{\boldsymbol{u};q,t}(P_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)})=\left[\prod_{i=1}^n\left(q^{n-i}u_1\cdots u_{i-1}\right)^{|\lambda^{(i)}|}\right]w_{\lambda^{(1)}}(v_1;q,q^{n-1}t)w_{\lambda^{(2)}}(v_2;q^{n-1}t,q^{n-2}t)\cdots w_{\lambda^{(n)}}(v_n;qt,t)$$

where $v_i=u_i\cdots u_n$ for $i\in\{1,\ldots,n\}$.

Proof: From (196) and (197), we have

$$P_\lambda^{(Q,q^{n-i}t)}\left[q^{n-i}u_1\cdots u_{i-1}\frac{1-u_i\cdots u_n}{1-q^{n-i}t}\right]=\left(q^{n-i}u_1\cdots u_{i-1}\right)^{|\lambda|}w_\lambda(u_i\cdots u_n;Q,q^{n-i}t)$$

From (196) and (168), the proposition is then an immediate consequence of the lemma that follows.

□

Lemma 14. *The linear map $\rho:X^{(i)}\mapsto\mathcal{X}^{(i)}$, $i=1,\ldots,n$, has the following action on the $A^{(i)}$'s defined in (169):*

$$\rho(A_i)=q^iu_1\cdots u_{n-i-1}\frac{1-u_{n-i}\cdots u_n}{1-q^it} \tag{198}$$

for $i=0,\ldots,n-1$.

Proof: We use induction on i. The base case $A_0=X^{(n)}$ holds since

$$\rho(A_0)=\mathcal{X}^{(n)}=u_1\cdots u_{n-1}\frac{1-u_n}{1-t}$$

which coincides with the $i = 0$ case of (198). Now, supposing that (198) holds, we have

$$\begin{aligned}\rho(A_{i+1}) &= \mathcal{X}^{(n-i-1)} + \frac{q(1-q^i t)}{(1-q^{i+1}t)}\rho(A_i) \\ &= q^{i+1}u_1\cdots u_{n-i-2}\left(\frac{1-u_{n-i-1}}{1-q^{i+1}t}\right) + \frac{q(1-q^i t)}{(1-q^{i+1}t)}q^i u_1\cdots u_{n-i-1}\,\frac{1-u_{n-i}\cdots u_n}{1-q^i t} \\ &= q^{i+1}\frac{u_1\cdots u_{n-i-2}}{1-q^{i+1}t}\big((1-u_{n-i-1}) + u_{n-i-1}(1-u_{n-i}\cdots u_n)\big)\end{aligned}$$

which proves the lemma by induction.

□

4.6. Multi-Kostka coefficients. The integral form of the Macdonald polynomial is defined as

$$J_\lambda^{(q,t)}(x) = c_\lambda(q,t)P_\lambda^{(q,t)}(x) \tag{199}$$

where

$$c_\lambda(q,t) = \prod_{s\in\lambda}(1-q^{a(s)}t^{l(s)+1}) \tag{200}$$

with again $a(s) = a_\lambda(s)$ and $l(s) = l_\lambda(s)$ such as defined in Section 2. We will also need to introduce the modified Macdonald polynomials

$$H_\lambda^{(q,t)}(x) = J_\lambda^{(q,t)}\left[\frac{X}{1-t}\right] \tag{201}$$

whose expansion in terms of Schur functions gives the q,t-Kostka polynomials

$$H_\lambda^{(q,t)}(x) = \sum_\mu K_{\mu\lambda}(q,t)\,s_\mu(x) \tag{202}$$

It is known [**23, 24**] that $K_{\mu\lambda}(q,t) \in \mathbb{N}[q,t]$.

Defining the integral form of the Multi-Macdonald polynomials as

$$J_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}(x^{(1)},\dots,x^{(n)}) = c_{\lambda^{(1)}}(q,q^{n-1}t)c_{\lambda^{(2)}}(q^{n-1}t,q^{n-2}t)\cdots c_{\lambda^{(n)}}(qt,t)P_{\boldsymbol{\lambda}}(x^{(1)},\dots,x^{(n)};q,t)$$

we then let the modified multi-Macdonald polynomials be such that

$$H_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}(x^{(1)},\dots,x^{(n)}) = \phi\big(J_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}(x^{(1)},\dots,x^{(n)})\big) \tag{203}$$

where ϕ, which generalizes the plethystic substitution found in (201), has the following action on the alphabets:

$$X^{(i)} \mapsto X^{(i)}, \quad i = 1,\dots,n-1, \qquad\qquad X^{(1)}+\cdots+X^{(n)} \mapsto \frac{X^{(1)}+\cdots+X^{(n)}}{1-t}$$

LEMMA 15. *We have*

$$\phi(A_i) = \frac{q^i t\left(X^{(1)}+\cdots+X^{(n-i-1)}\right) + X^{(n-i)} + qX^{(n-i+1)} + \cdots + q^i X^{(n)}}{1-q^i t} \tag{204}$$

Proof: We proceed by induction starting from the case A_0. We have

$$\begin{aligned}\phi(A_0) = \phi(X^{(n)}) &= \phi\big(X^{(1)} + \cdots + X^{(n)} - (X^{(1)} + \cdots + X^{(n-1)})\big)\\ &= \frac{X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}}{1-t} - (X^{(1)} + \cdots + X^{(n-1)})\\ &= \frac{t(X^{(1)} + \cdots + X^{(n-1)}) + X^{(n)}}{1-t}\end{aligned}$$

which shows that the lemma holds in that case. Then, assuming that (204) holds, we obtain

$$\begin{aligned}\phi(A_{i+1}) &= X^{(n-i-1)} + \frac{q(1-q^i t)}{(1-q^{i+1}t)}\phi(A_i)\\ &= X^{(n-i-1)} + \frac{q^{i+1}t\left(X^{(1)} + \cdots + X^{(n-i-1)}\right) + qX^{(n-i)} + q^2X^{(n-i+1)} + \cdots + q^{i+1}X^{(n)}}{1-q^{i+1}t}\\ &= \frac{q^{i+1}t\left(X^{(1)} + \cdots + X^{(n-i-2)}\right) + X^{(n-i-1)} + qX^{(n-i)} + \cdots + q^{i+1}X^{(n)}}{1-q^{i+1}t}\end{aligned}$$

which proves the lemma by induction.

□

The following proposition is then immediate from (201), (203) and (168).

Proposition 12. *Letting*

$$Z_i = q^i t\left(X^{(1)} + \cdots + X^{(n-i-1)}\right) + X^{(n-i)} + qX^{(n-i+1)} + \cdots + q^i X^{(n)}$$

we have

$$H_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = H_{\lambda^{(1)}}^{(q,q^{n-1}t)}[Z_{n-1}]\, H_{\lambda^{(2)}}^{(q^{n-1}t,q^{n-2}t)}[Z_{n-2}] \cdots H_{\lambda^{(n)}}^{(qt,t)}[Z_0]$$

We now define the multi q,t-Kostka coefficients $K_{\boldsymbol{\mu\lambda}}(q,t)$ as

$$H_{\boldsymbol{\lambda}}^{(q,t)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} K_{\boldsymbol{\mu\lambda}}(q,t)\, s_{\boldsymbol{\mu}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) \tag{205}$$

where the Schur function $s_{\boldsymbol{\mu}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = s_{\mu^{(1)}}(x^{(1)}) \cdots s_{\mu^{(n)}}(x^{(n)})$ was defined in (195). As in the proof of Proposition 12 in [**22**], the positivity of the usual q,t-Kostka coefficients together with the Littlewood-Richardson rule implies that the multi q,t-Kostka coefficients are positive.

Corollary 4. *The multi q,t-Kostka coefficients are polynomials in q and t with non-negative integer coefficients, that is, $K_{\boldsymbol{\mu\lambda}}(q,t) \in \mathbb{N}[q,t]$ for every $\boldsymbol{\mu}$ and $\boldsymbol{\lambda}$.*

Owing to $H_\lambda^{(1,1)}(x) = \big(p_1(x)\big)^{|\lambda|}$, we have from Proposition 12 that

$$H_\lambda^{(1,1)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \big(p_1[X^{(1)} + \cdots + X^{(n)}]\big)^{|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(n)}|} = \big(p_1[X^{(1)}] + \cdots + p_1[X^{(n)}]\big)^{|\lambda^{(1)}| + \cdots + |\lambda^{(n)}|}$$

Hence [**1**],

$$H_\lambda^{(1,1)}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)}) = \sum_{\boldsymbol{\mu}} \chi_{\mathrm{Id}}^{\boldsymbol{\mu}}\, s_{\boldsymbol{\mu}}(x^{(1)}, \ldots, x^{(n)})$$

where $\chi_{\mathrm{Id}}^{\boldsymbol{\mu}}$ is the character of $C_n \sim S_d$ (with d the total degree $|\mu^{(1)}| + \cdots + |\mu^{(n)}|$ of the multipartition $\boldsymbol{\mu}$) indexed by the irreducible representation $\boldsymbol{\mu}$ evaluated at the conjugacy class of the identity. From (205), it has the following consequence.

Corollary 5. *We have that* $K_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\lambda}}(1,1) = \chi^{\boldsymbol{\mu}}_{\mathrm{Id}}$, *that is,* $K_{\boldsymbol{\mu}\boldsymbol{\lambda}}(1,1)$ *is the dimension of the irreducible representation of* $C_n \sim S_d$ *indexed by the multi-partition* $\boldsymbol{\mu}$ *of total degree* d.

APPENDIX A

The non-symmetric Macdonald polynomials

The Macdonald polynomials defined in the section 3 can be obtained directly in terms of the so called non-symmetric Macdonald polynomials by a suitable symmetrization process, the results of this chapter can be find in [**4**].

The non-symmetric Macdonad polynomials are defined in terms of an eigenvalue problem formulated in terms of Cherednik operators. The Cherednik operators are constructed from the Demazure-Lustig operators T_i defined as

$$T_i = t + \frac{tx_i - x_{i+1}}{x_i - x_{i+1}}(K_{i,i+1} - 1), \quad i = 1, \dots, N-1, \tag{206}$$

and

$$T_0 = t + \frac{qtx_N - x_1}{qx_N - x_1}(K_{1,N}\tau_1\tau_N^{-1} - 1)\,, \tag{207}$$

where $K_{i,j}$ exchanges the variables x_i and x_j. Note that for $t = 1$, T_i reduces to $K_{i,i+1}$. The T_i's satisfy the affine Hecke algebra relations ($0 \le i \le N-1$):

$$\begin{aligned} &(T_i - t)(T_i + 1) = 0 \\ &T_iT_{i+1}T_i = T_{i+1}T_iT_{i+1} \\ &T_iT_j = T_jT_i\,, \quad i - j \neq \pm 1 \mod N \end{aligned} \tag{208}$$

where the indices are taken modulo N. To define the Cherednik operators, we also need to introduce the q-shift operators

$$\tau_i : \begin{cases} x_i \mapsto qx_i, \\ x_j \mapsto x_j \ \text{ if } j \neq i, \end{cases} \tag{209}$$

and the operator $\omega^{(N)}$ defined as:

$$\omega = K_{N-1,N} \cdots K_{1,2}\,\tau_1. \tag{210}$$

We note that $\omega T_i = T_{i-1}\omega$ for $i = 2, \dots, N-1$. The operators T_i act in the monomial $x_i^a x_{i+1}^b$ as follows

$$T_i x_i^a x_{i+1}^b = \begin{cases} (1-t)x_i^{a-1}x_{i+1}^{b+1} + \cdots (1-t)x_i^{b+1}x_{i+1}^{a-1} + x_i^b x_{i+1}^a, & a > b \\ tx_i^a x_{i+1}^a, & a = b \\ (t-1)x_i a x_{i+1}^b + \cdots + (t-1)x_i^{b-1}x_{i+1}^{a+1} + tx_i^b x_{i+1}^a & a < b. \end{cases}$$

Moreover, by the quadratic relation in 208 we observe

$$\begin{gathered} T_i^2 + T_i - tT_i = t \\ t^{-1}T_i(T_i + (1-t)) = 1, \end{gathered}$$

so

$$T_i^{-1} = t^{-1}T_i + t^{-1} - 1.$$

The Cherednik operators are defined by

$$Y_i = t^{-n+i} T_i \cdots T_{n-1} \omega^{(n)} T_1^{-1} \cdots T_{i-1}^{-1}, \quad 1 \le i \le n. \tag{211}$$

A composition η is $(\eta_1, \dots, \eta_l)$ is an element of $\mathbb{z}_{\ge 0}^l$. The Bruhat order in composition is defined as follows:

$$\nu \prec \eta \quad \text{iff} \quad \nu^+ < \eta^+ \quad \text{or} \quad \nu^+ = \eta^+ \quad \text{and} \quad w_\eta < w_\nu, \tag{212}$$

where η^+ is the partition associated to η and w_η is the unique permutation of minimal length such that $\eta = w_\eta \eta^+$ (w_η permutes the entries of η^+). In the Bruhat order on the symmetric group, $w_\eta < w_\nu$ iff w_η can be obtained as a proper subword of w_ν.

Definition 3. *The non-symmetric Macdonald polynomials E_η (labeled by compositions) are defined as the unique polynomial with rational coefficients in q and t satisfying*

$$E_\eta(x; q, t) = x^\eta + \sum_{\nu \prec \eta} b_{\eta\nu} x^\nu \tag{213}$$

and for all $1 \le i \le N$

$$Y_i E_\eta(x; q, t) = \overline{\eta_i} E_\eta(x; q, t) \qquad 1 \le i \le n \tag{214}$$

where

$$\overline{\eta_i} = q^{\eta_i} t^{-\overline{l_\eta}(i)}$$

with $\overline{l_\eta}(i) = \#\{k < i | \eta_k \ge \eta_i\} + \#\{k > i | \eta_k > \eta_i\}$.

We have two properties about the non-symmetric Macdonald polynomials. The first one expresses the stability of the polynomials E_η with respect to the number of variables (see e.g. [**4**, eq. (3.2)]):

$$E_\eta(x_1, \dots, x_{N-1}, 0) = \begin{cases} E_{\eta_-}(x_1, \dots, x_{N-1}) & \text{if } \eta_N = 0\,, \\ 0 & \text{if } \eta_N \ne 0\,. \end{cases} \tag{215}$$

where $\eta_- = (\eta_1, \dots, \eta_{N-1})$. The second one gives the action of the operators T_i on E_η (see e.g. [**5**, eq. (8)] and [**6**]):

$$T_i E_\eta = \begin{cases} \left(\frac{t-1}{1-\delta_{i,\eta}^{-1}}\right) E_\eta + t E_{s_i\eta} & \text{if } \eta_i < \eta_{i+1}\,, \\ t E_\eta & \text{if } \eta_i = \eta_{i+1}\,, \\ \left(\frac{t-1}{1-\delta_{i,\eta}^{-1}}\right) E_\eta + \frac{(1-t\delta_{i,\eta})(1-t^{-1}\delta_{i,\eta})}{(1-\delta_{i,\eta})^2} E_{s_i\eta} & \text{if } \eta_i > \eta_{i+1}\,, \end{cases} \tag{216}$$

where $\delta_{i,\eta} = \bar{\eta}_i / \bar{\eta}_{i+1}$ and $s_i\eta = (\eta_1, \dots, \eta_{i-1}, \eta_{i+1}, \eta_i, \eta_{i+2}, \dots, \eta_N)$.

The t-symmetrization and t-antisymmetrization operators of variables $x_1, \dots, x_N$ [**7**] are defined by:

$$U_N^+ = \sum_{\sigma \in S_N} T_\sigma \qquad \text{and} \qquad U_N^- = \sum_{\sigma \in S_N} (-t)^{-\ell(\sigma)} T_\sigma \tag{217}$$

where

$$T_\sigma = T_{i_1} \cdots T_{i_\ell} \qquad \text{if} \quad \sigma = s_{i_1} \cdots s_{i_\ell}. \tag{218}$$

The t-symmetrization and t-antisymmetrization operators obey the relations

$$T_i U_N^+ = U_N^+ T_i = t\, U_N^+ \qquad \text{and} \qquad T_i U_N^- = U_N^- T_i = -U_N^- \tag{219}$$

Note that for any polynomial f in the variables $x_1, \dots, x_N$, we have $K_{i,i+1} U_N^+ f = U_N^+ f$, but $K_{i,i+1} U_N^- f \neq -U_N^- f$ since [**4**, eq.(2.26)]

$$U_N^- f = t^{-\binom{N}{2}} \frac{\Delta_N^t}{\Delta_N} A_N f, \tag{220}$$

where

$$A_N = \sum_{\sigma \in S_N} (-1)^{\ell(\sigma)} K_\sigma \,, \quad \Delta_N^t = \prod_{1 \le i < j \le N} (t x_i - x_j) \,, \quad \Delta_N = \Delta_N^1 \,. \tag{221}$$

Note that A_N is the usual antisymmetrization operator. Below, we will designate by S_m and S_{m^c} the group of permutations of the variables $x_1, \dots, x_m$ and $x_{m+1}, \dots, x_N$ respectively. For instance, U_m^- and $U_{m^c}^+$ are defined as in (217) but with S_N replaced by S_m and S_{m^c} respectively. Similarly, we will frequently use the notation Δ_m^t which is defined as in (221) but with N replaced by m.

The operator U_N^+ conmutes with $\sum_{i=1}^N Y_i$, it follows from (213) and (214) that there exists a unique symmetric polynomial P_λ where λ is a partition which satisfy

$$\prod_{i=1}^N (1 + uY_i) P_\lambda(x; q, t) = \prod_{i=1}^N (1 + q^{\lambda_i} t^{-\overline{l_\lambda}(i)}) P_\lambda(x; q, t),$$
$$P_\lambda(x; q, t) = m_\lambda(x) + \sum_{\mu < \lambda} u_{\mu\lambda} m_\mu(x);$$

in fact, such $P_\lambda(x; q, t)$ are the Macdonald polynomials defined in the first chapter. Moreover we have that the symmetric and the nonsymmetric Macdonald polynomials are related in the following way

$$P_{\eta^+}(x; q, t) = \frac{1}{\gamma_\eta^+(q, t)} U_N^+ E_\eta(x; q, t),$$

for some scalar $\gamma_\eta^+(q, t)$.

1. Interpolation Macdonald polynomials

The non-symmetric Macdonald polynomials given in Chapter A have a non-homogeneous analog called the interpolation Macdonald polynomials [**19**]. We extend to the Macdonald case a certain result of [**17**] pertaining to Pieri-type rules for non-symmetric Jack polynomials; this result will be used in the proofs of the Proposition 3 and 4 below in the Section 2.

The interpolation Macdonald polynomial $E_\eta^*(x; q, t)$ is defined as the unique polynomial of degree $\le |\eta|$ whose coefficient in x^η is equal to 1 and such that

$$E_\eta^*(\bar\eta; q, t) \neq 0 \qquad \text{and} \qquad E_\eta^*(\bar\mu; q, t) = 0 \ \text{ for } |\mu| \le |\eta| \text{ and } \mu \neq \eta$$

where $\bar\mu = (\bar\mu_1, \dots, \bar\mu_n)$, with $\bar\mu_i$ the eigenvalue defined in (214). The non-symmetric Macdonald polynomials can be obtained by taking the highest degree term in an interpolation Macdonald polynomial, that is,

$$E_\eta^*(x; q, t) = E_\eta(x; q^{-1}, t^{-1}) + \sum_{|\mu| < |\eta|} b_{\eta\mu} E_\mu(x; q^{-1}, t^{-1}). \tag{222}$$

The interpolation Macdonald polynomials satisfy an extra vanishing condition that will prove crucial. Let $\preccurlyeq$ be the partial order on compositions such that $\nu \preccurlyeq \eta$ if there exists a permutation π such that $\nu_i < \eta_{\pi(i)}$ for $i < \pi(i)$ and $\nu_i \leq \eta_{\pi(i)}$ for $i \geq \pi(i)$. Then

$$E^*_\eta(\bar{\mu}; q, t) = 0 \quad \text{if } \eta \not\preccurlyeq \mu$$

This extra vanishing condition implies that any analytic function $f(x)$ vanishing on $\{\bar{\mu} : \eta \not\preccurlyeq \mu\}$ can be written in the form

$$f(x) = \sum_{\mu : \eta \preccurlyeq \mu} c_{\eta\mu}(q,t) E^*_\mu(x; q, t).$$

We are interested in the case $f(x) = x_{i_1} \cdots x_{i_p} E^*_\eta(x; q, t)$ where $i_1, \ldots, i_p$ are distinct elements of $\{1, \ldots, N\}$. Since it vanishes on $\{\bar{\mu} : \eta \not\preccurlyeq \mu\}$, we can write

$$x_{i_1} \cdots x_{i_p} E^*_\eta(x; q, t) = \sum_{\mu : \eta \preccurlyeq \mu} c^{(i_1, \ldots, i_p)}_{\eta\mu}(q,t) E^*_\mu(x; q, t).$$

From (222), we can take the leading homogeneous term on both sides to get

$$x_{i_1} \cdots x_{i_p} E_\eta(x; q^{-1}, t^{-1}) = \sum_{\mu : \eta \preccurlyeq \mu, |\mu| = |\eta| + p} c^{(i_1, \ldots, i_p)}_{\eta\mu}(q,t) E_\mu(x; q^{-1}, t^{-1}) \tag{223}$$

which is equivalent to

$$x_{i_1} \cdots x_{i_p} E_\eta(x; q, t) = \sum_{\mu : \eta \preccurlyeq \mu, |\mu| = |\eta| + p} c^{(i_1, \ldots, i_p)}_{\eta\mu}(q^{-1}, t^{-1}) E_\mu(x; q, t) \tag{224}$$

We can obtain a better upper bound on the summation index μ using the orthogonality of the non-symmetric Macdonald polynomials. Let C.T.(f) denote the constant term of the Laurent series of f in the variables $x_1, \ldots, x_N$. Define the following scalar product on $\mathbb{Q}(q,t)[x_1, \ldots, x_N]$:

$$\langle f, g \rangle_{q,t} := \text{C.T.}\left\{ f(x; q, t)\, g(x^{-1}; q^{-1}, t^{-1})\, W(x; q, t) \right\}, \tag{225}$$

where

$$W(x; q, t) = \prod_{1 \leq i < j \leq N} \frac{(x_i/x_j; q)_\infty\, (q x_j/x_i; q)_\infty}{(t x_i/x_j; q)_\infty\, (q t x_j/x_i; q)_\infty}. \tag{226}$$

Note that this scalar product is sesquilinear, that is, for $c = c(q,t) \in \mathbb{Q}(q,t)$, we have

$$\langle c\, f, g \rangle_{q,t} = c\, \langle f, g \rangle_{q,t} \quad \text{and} \quad \langle f, c\, g \rangle_{q,t} = \bar{c}\, \langle f, g \rangle_{q,t}, \tag{227}$$

where $\bar{c} = c(1/q, 1/t)$. It is known [**1, 7**] that the non-symmetric Macdonald polynomials $E_\eta(x; q, t)$ form an orthogonal set with respect to $\langle \cdot, \cdot \rangle_{q,t}$. From this orthogonality and the sesquilinearity of the scalar product, we have

$$c^{(i_1, \ldots, i_p)}_{\eta\mu}(q,t) = \frac{\langle E_\mu\,,\, x_{i_1} \cdots x_{i_p} E_\eta \rangle_{q,t}}{\langle E_\mu\,,\, E_\mu \rangle_{q,t}}.$$

Since $\langle x_k\, f, x_k\, g \rangle_{q,t} = \langle f, g \rangle_{q,t}$ for all k and $x_1 \cdots x_N E_\eta = E_{\eta + 1^N}$, where $\eta + 1^N$ is the composition $(\eta_1 + 1, \ldots, \eta_N + 1)$, we get

$$c^{(i_1, \ldots, i_p)}_{\eta\mu}(q^{-1}, t^{-1}) = \frac{\langle x_{j_1} \cdots x_{j_{N-p}} E_\mu\,,\, E_{\eta + 1^N} \rangle_{q,t}}{\langle E_\mu\,,\, E_\mu \rangle_{q,t}} = c^{(j_1, \ldots, j_{N-p})}_{\mu\; \eta + 1^N}(q,t) \frac{\langle E_{\eta + (1^N)}\,,\, E_{\eta + (1^N)} \rangle_{q,t}}{\langle E_\mu\,,\, E_\mu \rangle_{q,t}},$$

where $\{j_1,\dots,j_{N-p}\}$ is the complement of $\{i_1,\dots,i_p\}$ in $\{1,\dots,N\}$. But using (224) we have that $c_{\eta\ \mu+1^N}^{(j_1,\dots,j_{N-p})}(q^{-1},t^{-1})=0$ for $\mu \not\preccurlyeq \eta+1^N$. Hence

$$c_{\eta\mu}^{(i_1,\dots,i_p)}(q^{-1},t^{-1})=0 \quad \text{for} \quad \mu \not\preccurlyeq \eta+1^N.$$

Therefore we can make in (224) the additional restriction $\mu \preccurlyeq \eta+(1^N)$ to obtain

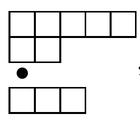
$$x_{i_1}\cdots x_{i_p}E_\eta(x;q,t)=\sum_{\mu\in \mathbb{J}_{N,p}} c_{\eta\mu}^{(i_1,\dots,i_p)}(q^{-1},t^{-1})E_\mu(x;q,t), \tag{228}$$

where

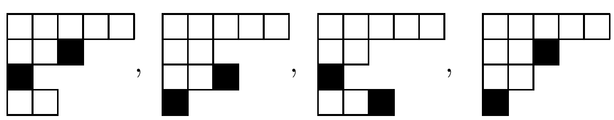
$$\mathbb{J}_{N,p} := \{\mu : \eta \preccurlyeq \mu \preccurlyeq \eta+1^N, |\mu|=|\eta|+p\}.$$

This result is the extension to the Macdonald case of a result of [**17**] (see also [**5**] where the Macdonald case was considered for $e_r(x)$ instead of for $x_{i_1}\cdots x_{i_p}$). Given $(i_1,\dots,i_p)$, a more explicit description of the set $\mathbb{J}_{N,p}$ is derived in [**17**] which can be interpreted as all the rearrangements of the rows of the new diagram such that the rows with a cell added can only move downwards or stay stationary, while the remaining rows can only move upwards or stay stationary. This interpretation will play a fundamental role in the proofs of Propositions 3 and 4.

Example. Consider the composition $\eta=(5,2,0,1)$ and its Ferrer diagram

,

Suppose $p=2$ and $i_1=2, i_2=3$, then the set $\mathbb{J}_{N,p}$ consists by the diagrams



2. Proofs of proposition 3 and 4 in Chapter 3, Section 2.1

The proofs will mainly follow the steps of the corresponding proofs in the Jack polynomial in superspace case [**16**].

Proof of Proposition 3: Using the notation of Chapter A, we let

$$\mathcal{O}_{sym}=\sum_{\sigma\in S_N/(S_m\times S_{m^c})} \mathcal{K}_\sigma \theta_1\cdots\theta_m A_m U_{m^c}^+. \tag{229}$$

Using (220) with N replaced by m, we get

$$A_m f = t^{\binom{m}{2}}\frac{\Delta_m}{\Delta_m^t}U_m^- f$$

which immediately implies from (219) that $\mathcal{O}_{sym}T_i = t\,\mathcal{O}_{sym}$ if $i=m+1,\dots,N-1$ and $\mathcal{O}_{sym}T_i=-\mathcal{O}_{sym}$ if $i=1,\dots,m-1$. Hence, (216) gives

$$P_\Lambda \propto \mathcal{O}_{sym}E_\eta,$$

whenever the first m components of η are a rearrangement of $\Lambda_1, \dots, \Lambda_m$ and the last $N-m$ components of η are a rearrangement of $\Lambda_{m+1}, \dots, \Lambda_N$ (the symbol $\propto$ means that the result holds up to a constant). We can now prove that

$$e_r\, P_\Lambda = \sum_\Omega g^\Omega_{\Lambda,1^n} P_\Omega$$

where $g^\Omega_{\Lambda,1^n} \neq 0$ only if Ω/Λ is a vertical n-strip, i.e. only if Ω^*/Λ^* and $\Omega^{\circledast}/\Lambda^{\circledast}$ are vertical n-strips. First, we observe that

$$e_r P_\Lambda \propto e_r \mathcal{O}_{sym} E_{\tilde\Lambda} = \mathcal{O}_{sym} e_r E_{\tilde\Lambda} = \mathcal{O}_{sym} \sum_{i_1 < \ldots < i_r} x_{i_1} \ldots x_{i_r} E_{\tilde\Lambda}$$

since e_r is symmetric in $x_1, \dots, x_N$. Given a composition η whose first m entries are distinct, let $\Omega_\eta = (\Omega_\eta^a; \Omega_\eta^s)$ be the superpartition such that Ω_η^a (resp. Ω_η^s) is obtained by rearranging the first m entries of η (resp. the last $N-m$ entries of η). Note that we will never consider the case where the first m entries of η are not all distinct since in this case $\mathcal{O}_{sym} E_\eta = 0$ given that $A_m K_{i,i+1} = 0$ and $K_{i,i+1} E_\eta = E_\eta$ if $\eta_i = \eta_{i+1}$ by (216). We thus need to show that the η's that appear in $x_{i_1} \cdots x_{i_r} E_{\tilde\Lambda}$ are all such that Ω_η/Λ is a vertical r-strip

We have that (228) says in particular that η is obtained by adding r boxes in distinct rows of $\tilde\Lambda$. It is thus immediate that Ω_η^*/Λ^* is a vertical r-strip. To see that $\Omega_\eta^{\circledast}/\Lambda^{\circledast}$ is also a vertical r-strip, we use the interpretation of $\jmath_{N,r}$ given in the paragraph that follows (228) which tells us that the rows with a cell added can only stay in their position or move downwards in the corresponding diagrams. Since the rows of η are a rearrangement of those of $\tilde\Lambda$ plus a certain vertical r-strip, the only way $\Omega_\eta^{\circledast}/\Lambda^{\circledast}$ would not be a vertical r-strip is if one of the last $N-m$ rows of $\tilde\Lambda$ gained a cell and then was rearranged into one of the first m rows (thus gaining two cells when considered in $\Omega^{\circledast}$). But this is impossible from the previous argument since the last $N-m$ rows of $\tilde\Lambda$ cannot move to one of the first m rows if they gained a cell (since in this case they would have moved up in the diagram).

□

Proof of Proposition 4: We have to prove that

$$\tilde e_r P_\Lambda = \sum_\Omega g^\Omega_{\Lambda,(0;1^n)} P_\Omega$$

where $g^\Omega_{\Lambda,(0;1^n)} \neq 0$ only if Ω/Λ is a vertical $\tilde n$-strip, that is, only if Ω^*/Λ^* is a vertical n-strip and $\Omega^{\circledast}/\Lambda^{\circledast}$ is a vertical $(n+1)$-strip.

It was established in the proof of Lemma 4 in [**18**] that

$$\tilde e_r \mathcal{O}_{sym}|_{\theta_1\cdots\theta_{m+1}} = (-1)^m A_{m+1} e_r^{(m+1)} U^+_{m^c},$$

where $e_r^{(m+1)}$ is obtained by letting $x_{m+1} = 0$ in e_r, and where $f|_{\theta_1\cdots\theta_{m+1}}$ stands for the coefficient of $\theta_1 \cdots \theta_{m+1}$ in f. We then use the well-known factorization

$$U^+_{m^c} = U^+_{(m+1)^c}\big(1 + T_{m+1} + T_{m+1}T_{m+2} + T_{m+1}T_{m+2}T_{m+3} \cdots + T_{m+1}T_{m+2}\cdots T_{N-1}\big)$$

and the commutation of $e_r^{(m+1)}$ and $U^+_{(m+1)^c}$ to deduce that

$$\tilde e_r P_\Lambda|_{\theta_1\cdots\theta_{m+1}} \propto A_{m+1} e_r^{(m+1)} U^+_{(m+1)^c} L_m\, E_{\tilde\Lambda} = A_{m+1} U^+_{(m+1)^c} e_r^{(m+1)} L_m\, E_{\tilde\Lambda} \tag{230}$$

where $L_m = 1 + T_{m+1} + T_{m+1}T_{m+2} + T_{m+1}T_{m+2}T_{m+3} \cdots + T_{m+1}T_{m+2} \cdots T_{N-1}$. We thus have that

$$\tilde{e}_r P_\Lambda \propto \mathcal{O}_{sym}^{(m+1)} e_r^{(m+1)} L_m \, E_{\tilde{\Lambda}} \tag{231}$$

where the superscript $m+1$ in $\mathcal{O}_{sym}^{(m+1)}$ indicates that m is replaced by $m+1$ in (229). From (216), we observe that $L_m E_{\tilde{\Lambda}}$ is a sum of E_ν's where ν is obtained by rearranging the last $N-m$ rows of $\tilde{\Lambda}$. Now $e_r^{(m+1)} E_\nu$ is a sum of terms of the type

$$x_{i_1} \cdots x_{i_r} E_\nu \tag{232}$$

where $m+1 \notin \{i_1, \ldots, i_r\}$ and where we recall that ν is obtained by rearranging the last $N-m$ rows of $\tilde{\Lambda}$. Given a composition η whose first $m+1$ entries are distinct, we let $\tilde{\Omega}_\eta = (\tilde{\Omega}_\eta^a; \tilde{\Omega}_\eta^s)$ be the superpartition such that $\tilde{\Omega}_\eta^a$ (resp. $\tilde{\Omega}_\eta^s$) is obtained by rearranging the first $m+1$ entries of η (resp. the last $N-m-1$ entries of η). As in the proof of Proposition 3, it is immediate from (228) that $\tilde{\Omega}_\eta^*/\Lambda^*$ is a vertical r-strip. To show that $\tilde{\Omega}_\eta^{\circledast}/\Lambda^{\circledast}$ is a vertical $(r+1)$-strip turns out however to be slightly more subtle than to show the corresponding case (that $\Omega_\eta^{\circledast}/\Lambda^{\circledast}$ is a vertical r-strip) in Proposition 3. Since ν is simply a rearrangement of the last $N-m$ rows of $\tilde{\Lambda}$, we can consider for simplicity that ν is equal to $\tilde{\Lambda}$. Now $e_r^{(m+1)}$ does not add a cell in row $(m+1)$ of $\tilde{\Lambda}$. By the interpretation of $\jmath_{N,r}$ given in the paragraph that follows (228), row $m+1$ can only stay stationary or move upwards in the corresponding diagrams (which means that $\tilde{\Lambda}_{m+1}$ will gain exactly one cell when considered in $\tilde{\Omega}^{\circledast}$). The rest of the proof is more or less exactly as in the proof that $\Omega_\eta^{\circledast}/\Lambda^{\circledast}$ is a vertical r-strip in Proposition 3. Since the remaining rows of η are a rearrangement of those of $\tilde{\Lambda}$ plus a certain vertical r-strip, the only way $\Omega_\eta^{\circledast}/\Lambda^{\circledast}$ would not be vertical r-strip is if one of the last $N-m$ rows of $\tilde{\Lambda}$ gained a cell and then was rearranged into one of the first $m+1$ rows (thus gaining two cells when considered in $\Omega^{\circledast}$). But this is impossible since the last $N-m-1$ rows of $\tilde{\Lambda}$ cannot move to one of the first $m+1$ rows if they gained a cell (since in this case they would have moved upwards in the diagram).

□

APPENDIX B

Specialization and Symmetry in superspace

Let $F(x;\theta)$ be a superpolynomial in $\mathcal{R}^{(n|m)}$. For each superpartion Λ of degree $(n|m)$, we define the evaluation

$$u_\Lambda(F) = \left[\frac{\partial_{\theta_1}\cdots\partial_{\theta_m}F}{\Delta_m(x)}\right]_{x_i=v_i}$$

where $\Delta_m(x)$ is the Vandermonde determinant in the first m variables and where $v_{\sigma^{-1}(i)} = q^{-\Lambda_i^*}t^{i-1}$ for all i and a permutation σ in S_n such that $\sigma(\Lambda) = \Lambda^*$.

The smallest superpartition in dominance order is denoted by $\emptyset := (\delta_m;\ )$, where $\delta_m = (m-1, m-2, \ldots, 1, 0)$. We observe that

$$u_\emptyset(F(x;\theta)) = \mathcal{E}^m_{t^{N-m},q,t}(F(x;\theta))$$

where $\mathcal{E}^m_{t^{N-m},q,t}$ is the evaluation given in the previous chapter in (93). We define

$$\overline{P}_\Lambda = \frac{P_\Lambda}{u_\emptyset(P_\Lambda)}$$

where we stress that the explicit formula for $u_\emptyset(P_\Lambda)$ was established in this thesis (see Theorem 4 in Chapter 3).

Conjecture 2. *(Symmetry property) Let Λ and Ω be superpartitions of degree $(n|m)$. Then*

$$u_\Lambda(\overline{P_\Omega}) = u_\Omega(\overline{P_\Lambda}).$$

APPENDIX C

Ejemplos de Superpolinomios de Macdonald

A continuación presentamos diversos ejemplos de Superpolinomios de Macdonald expandidos en la base de los supermonomiales y luego escritos en variables.

1. Ejemplos de Superpolinomios de Macdonald expandidos en Supermonomiales.

La primera tabla corresponde a los Superpolinomios de Macdonald indexados por todas las superparticiones de (3|2) y la segunda corresponde a los indexados por todas las superparticiones de (6|3).

$\Lambda \vdash (3\,\vert\,2)$	$P_\Lambda^{q,t}$
$(1,0;1,1)$	$m_{(1,0;1,1)}$
$(1,0;2)$	$m_{(1,0;2)} + \frac{(1-t)(1+qt)}{1-qt^2} m_{(1,0;1,1)}$
$(2,0;1)$	$m_{(2,0;1)} + \frac{2q(1-t)}{1-qt} m_{(1,0;1,1)} + \frac{q(1-t)}{1-qt} m_{(1,0;2)}$
$(2,1;\ )$	$m_{(2,1;\ )} + \frac{q^2(1-t)^2}{(1-qt)^2} m_{(1,0;1,1)} - \frac{q^2t(1-t)(1-q)}{(1+qt)(1-qt)^2} m_{(1,0;2)} + \frac{q(1-t)}{1-qt} m_{(2,0;1)}$
$(3,0;\ )$	$m_{(3,0;\ )} + \frac{q^2(1+q)(1-t)^2}{(1-qt)(1-q^2t)} m_{(1,0;1,1)} + \frac{q^2(1-t)}{1-q^2t} m_{(1,0;2)} + \frac{q(1+q)(1-t)}{1-q^2t} m_{(2,0;1)} + \frac{q(1-t)}{1-q^2t} m_{(2,1;\ )}$

$\Lambda \vdash (6\|3)$	$P_\Lambda^{q,t}$
$(2,1,0;1,1,1)$	$m_{(2,1,0;1,1,1)}$
$(2,1,0;2,1)$	$m_{(2,1,0;2)} + \frac{(1-t)(1+qt)}{1-qt^2} m_{(2,1,0;1,1,1)}$
$(2,1,0;3)$	$m_{(2,1,0;3)} + \frac{(1-t)^2(1+qt)(1+qt+q^2t^2)}{(1-qt^2)(1-q^2t^3)} m_{(2,1,0;1,1,1)} + \frac{(1-t)(1+qt+q^2t^2)}{1-q^2t^3} m_{(2,1,0;2,1)}$
$(3,1,0;1,1)$	$m_{(3,1,0;1,1)} + \frac{3q(1-t)}{1-qt} m_{(2,1,0;1,1,1)} + \frac{q(1-t)}{1-qt} m_{(2,1,0;2,1)}$
$(3,1,0;2)$	$m_{(3,1,0;2)} + \frac{3qt(1+qt)(1-t)^2}{(1-qt)(1-qt^2)} m_{(2,1,0;1,1,1)} + \frac{q(1-t)(2qt^2-qt+t-2)}{(1-qt^2)(1-qt)} m_{(2,1,0;2,1)} + \frac{q(1-t)}{1-qt} m_{(2,1,0;3)} + \frac{(1-t)(1+qt)}{1-qt^2} m_{(3,1,0;1,1)}$
$(3,2,0;1)$	$m_{(3,2,0;1)} + \frac{3q^2(1-t)^2}{(1-qt)^2} m_{(2,1,0;1,1,1)} + \frac{q^2(1-t)(1-qt^2+2qt-2t)}{(1+qt)(1-qt)^2} m_{(2,1,0;2,1)} - \frac{q^2t(1-t)(1-q)}{(1+qt)(1-qt)^2} m_{(2,1,0;3)} + \frac{2q(1-t)}{1-qt} m_{(3,1,0;1,1)} + \frac{q(1-t)}{1-qt} m_{(3,1,0;2)}$
$(3,2,1;\ )$	$m_{(3,2,1;\ )} + \frac{q^3(1-t)^3}{(1-qt)^3} m_{(2,1,0;1,1,1)} - \frac{q^3t(1-t)^2(1-q)}{(1+qt)(1-qt^3)} m_{(2,1,0;2,1)} + \frac{q^3t^2(1-t)(1-q)(1-q^2t)}{(1+qt)(1+qt+q^2t^2)(1-qt)^3} m_{(2,1,0;3)} + \frac{q^2(1-t)^2}{(1-qt)^2} m_{(3,1,0;1,1)} - \frac{q^2t(1-t)(1-q)}{(1+qt)(1-qt)^2} m_{(3,1,0;2)} + \frac{q(1-t)}{1-qt} m_{(3,2,0;1)}$
$(4,1,0;1)$	$m_{(4,1,0;1)} + \frac{3q^2(1-t)^2(1+q)}{(1-qt)(1-q^2t)} m_{(2,1,0;1,1,1)} + \frac{q^2(1-t)(2-2qt+q-t)}{(1-q^2t)(1-qt)} m_{(2,1,0;2,1)} + \frac{q^2(1-t)}{1-q^2t} m_{(2,1,0;3)} + \frac{2q(1-t)(1+q)}{1-q^2t} m_{(3,1,0;1,1)} + \frac{q(1-t)(1+q)}{1-q^2t} m_{(3,1,0;2)} + \frac{q(1-t)}{1-q^2t} m_{(3,1,0;2)} + \frac{q(1-t)}{1-q^2t} m_{(3,2,0;1)}$
$(4,2,0;\ )$	$m_{(4,2,0;\ )} + \frac{q^3(1-t)^3(2q^2t+qt+q+2)}{(1-qt)^2(1-q^3t^2)} m_{(2,1,0;1,1,1)} + \frac{q^3(1-t)^3(1+q^2t)}{(1-qt)^2(1-q^3t^2)} m_{(2,1,0;2,1)} - \frac{q^3t(1-t)(1-q)}{(1-qt)(1-q^3t^2)} m_{(2,1,0;3)} + \frac{q^2(1-t)^2(2q^2t+qt+q+2)}{(1-qt)(1-q^3t^2)} m_{(3,1,0;1,1)} + \frac{q^2(1-t)^2(1+q^2t)}{(1-qt)(1-q^3t^2)} m_{(3,1,0;2)} + \frac{q(1-t)(1+q-qt+q^2t-q^2t^2-q^3t^2)}{(1-qt)(1-q^3t^2)} m_{(3,2,0;1)} + \frac{q(1-t)}{1-qt} m_{(4,1,0;1)} + \frac{q(1+qt)(1-t)}{1-q^3t^3} m_{(3,2,1;\ )}$

2. Ejemplos de Superpolinomios de Macdonald en 3 variables.

$\Lambda = (\Lambda^a; \Lambda^s)$	$P_{\Lambda}^{q,t}(x_1, x_2, x_3; \theta_1, \theta_2, \theta_3)$
$(2;2,1)$	$x_1x_2x_3 \Big(\theta_1x_1(x_2+x_3)+\theta_2x_2(x_1+x_3)+\theta_3x_3(x_1+x_2)+\frac{q(-1+t)(1+t)}{qt^2-1}(\theta_1x_2x_3+\theta_2x_1x_3+\theta_3x_1x_2)\Big)$
$(3,1;2)$	$x_1x_2x_3 \Big(\theta_1\theta_2x_3(x_1^2-x_2^2)+\theta_2\theta_3x_1(x_2^2-x_3^2)+\theta_1\theta_3x_2(x_1^2-x_3^2)+\frac{q(t-1)}{(qt-1)}(\theta_1\theta_2x_3^2(x_1-x_2)+\theta_2\theta_3x_1^2(x_2-x_3)+ \theta_1\theta_3x_2^2(x_1-x_3))\Big)$
$(3,0;2)$	$\theta_1\theta_2x_3^2(x_1^3-x_2^3)+\theta_2\theta_3x_1^2(x_2^3-x_3^3)+\theta_1\theta_3x_2^2(x_1^3-x_3^3)+\frac{q(t-1)}{qt-1}(\theta_1\theta_2x_3^3(x_1^2-x_2^2)+\theta_2\theta_3x_1^3(x_2^2-x_3^2)+\theta_1\theta_3x_2^3(x_1^2-x_3^2))+ x_1x_2x_3\frac{(t-1)}{(qt-1)}\Big(q\frac{2qt^2-qt+t-2}{(qt+1)(qt-1)}(\theta_1\theta_2x_3(x_1-x_2)+\theta_2\theta_3x_1(x_2-x_3)+\theta_1\theta_3x_2(x_1-x_3))+\theta_1\theta_2(x_1^2-x_2^2)+ \theta_2\theta_3(x_2^2-x_3^2)+\theta_1\theta_3(x_1^2-x_3^2)\Big)$
$(3;3)$	$\theta_1x_1^3(x_2^3+x_3^3)+\theta_2x_2^3(x_1^3+x_3^3)+\theta_3x_3^3(x_1^3+x_2^3)+\frac{q^3(t-1)(t+1)}{(q^3t^2-1)}[\theta_1x_2^3x_3^3+\theta_2x_1^3x_3^3+\theta_3x_2^3x_1^3]+\frac{q^2(t-1)(q^2+q+1)(qt^2-1)}{(q^3t^2-1)(q^2t-1)}[\theta_1x_1x_2^2x_3^2(x_2+x_3)+ \theta_2x_1^2x_2x_3^2(x_1+x_3)+\theta_3x_1^2x_3^2(x_1+x_2)]+\frac{q(t-1)^2(q+1)(q^2+q+1)(qt+1)}{(q^3t^2-1)(q^2t-1)}x_1^2x_2^2x_3^2(\theta_1+\theta_2+\theta_3)+\frac{q(t-1)(q^2+q+1)(qt-1)(qt+1)}{(q^3t^2-1)(q^2t-1)}x_1x_2x_3[\theta_1x_1(x_2^2+ x_3^2)+\theta_2x_2(x_1^2+x_3^2)+\theta_3x_3(x_1^2+x_2^2)]+\frac{(t-1)(q^2+q+1)}{(q^2t-1)}x_1x_2x_3[\theta_1x_1^2(x_2+x_3)+\theta_2x_2^2(x_1+x_3)+\theta_3x_3^2(x_1+x_2)]$
$(2,0;2)$	$\theta_1\theta_2x_3^2(x_1^2-x_2^2)+\theta_2\theta_3x_1^2(x_2^2-x_3^2)+\theta_1\theta_3x_2^2(x_1^2-x_3^2)+\frac{t-1}{qt-1}x_1x_2x_3[\theta_1\theta_2(x_1-x_2)+\theta_2\theta_3(x_2-x_3)+\theta_1\theta_3(x_1-x_3)]$
$(4,1;1)$	$x_1x_2x_3 \Big(\theta_1\theta_2(x_1^3-x_2^3)+\theta_2\theta_3(x_2^3-x_3^3)+\theta_1\theta_3(x_1^3-x_3^3)+\frac{q^2(t-1)}{(q^2t-1)}[\theta_1\theta_2x_3^2(x_1-x_2)+\theta_2\theta_3x_1^2(x_2-x_3)+\theta_1\theta_3x_2^2(x_1-x_3)] + \frac{q(-1+t)(q+1)}{q^2t-1}[\theta_1\theta_2x_3(x_1^2-x_2^2)+\theta_2\theta_3x_1(x_2^2-x_3^2)+\theta_1\theta_3x_2(x_1^2-x_3^2)] + \frac{q(-1+t)}{q^2t-1}[\theta_1\theta_2x_1x_2(x_1-x_2)+\theta_2\theta_3x_2x_3(x_2-x_3)+ \theta_1\theta_3x_1x_3(x_1-x_3)]\Big)$
$(2;3,1)$	$x_1x_2x_3 \Big(\theta_1x_1(x_2^2+x_3^2)+\theta_2x_2(x_1^2+x_3^2)+\theta_3x_3(x_1^2+x_2^2)+\frac{q(-1+t)}{qt-1}[\theta_1x_2x_3(x_2+x_3)+\theta_2x_1x_3(x_1+x_3)+\theta_3x_1x_2(x_1+x_2)] + \frac{(-1+t)(q+1)}{qt-1}x_1^2x_2^2x_3^2(\theta_1+\theta_2+\theta_3)\Big)$
$(3,0;3)$	$\theta_1\theta_2x_3^3(x_1^3-x_2^3)+\theta_1\theta_3x_2^3(x_1^3-x_3^3)+\theta_2\theta_3x_1^3(x_2^3-x_3^3)+\frac{q(t-1)}{q^2t-1}x_1x_2x_3[\theta_1\theta_2x_3^2(x_1-x_2)+\theta_2\theta_3x_1^2(x_2-x_3)+\theta_1\theta_3x_2^2(x_1-x_3)]+ \frac{(t-1)(q+1)}{q^2t-1}x_1x_2x_3[\theta_1\theta_2x_3(x_1^2-x_2^2)+\theta_2\theta_3x_1(x_2^2-x_3^2)+\theta_1\theta_3x_2(x_1^2-x_3^2)]+\frac{t-1}{q^2t-1}x_1x_2x_3[\theta_1\theta_2x_1x_2(x_1-x_2)+\theta_2\theta_3x_2x_3(x_2- x_3)+\theta_1\theta_3x_1x_3(x_1-x_3)]$

APPENDIX D

Ejemplos de Norma y Evaluación.

A continuación daremos algunos ejemplos de la fórmulas de la norma y evaluación dadas en (97) y (155).

1. Ejemplos de Evaluación

Para recordar tenemos que la evaluación de un superpolinomio $f(x;\theta)$ es definida por

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}(p_\Lambda) = s_{\Lambda^a-\delta_m}\big(\frac{1}{q^{m-1}}, \frac{t}{q^{m-2}}, \ldots, t^{m-1}\big) \prod_{i=1}^{\ell(\Lambda^s)} \Big[p_{\Lambda_i^s}(\frac{1}{q^{m-1}}, \ldots, t^{m-1}) + t^{m\Lambda_i^s} \cdot \frac{1-u^{\Lambda_i^s}}{1-t^{\Lambda_i^s}}\Big]$$

y probamos que la evaluación de un superpolinomio de Macdonad es dado por

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) = \frac{t^{n((\Lambda')^a/\delta_m)+n(\mathcal{S}\Lambda)}}{q^{(m-1)|\Lambda^a/\delta_m|-n(\Lambda^a/\delta_m)}} \frac{\prod_{(i,j)\in\mathcal{S}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-(i-1)}u)}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})}.$$

Además definimos una segunda evaluación dada por:

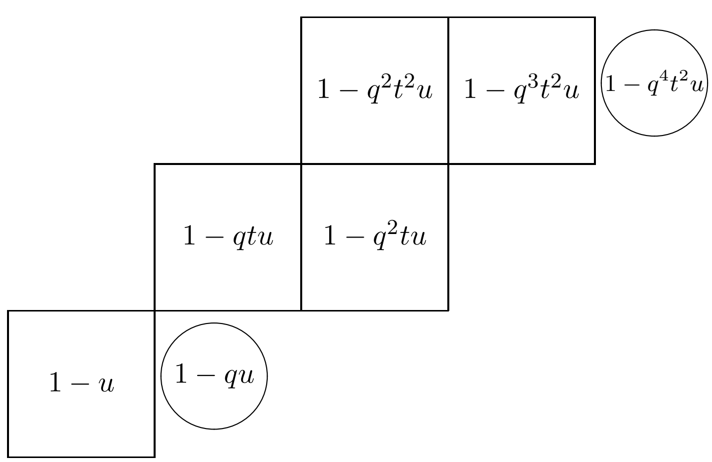
$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}\big(f(x:\theta)\big) = \mathcal{E}^{m-1}_{u;q,t}\Big[\big[\partial_{\theta_1} f(x;\theta)\big]_{x_1=0}\Big]_{x_i\to x_{i-1},\theta_i\to\theta_{i-1}},$$

y en un superpolinomio de Macdonald esta evaluación tiene la siguiente fórmula

$$\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big) = \frac{t^{n(\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda)+n((\Lambda')^a/\delta_{m-1})}}{q^{(m-2)|\Lambda^a/\delta_{m-1}|-n(\Lambda^a/\delta_{m-1})}} \frac{\prod_{(i,j)\in\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda}(1-q^{j-1}t^{m-i}u)}{\prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda}(1-q^{a_{\Lambda^\circledast}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1})}. \qquad (233)$$

Ejemplo 1. Supongamos $\Lambda = (4,1;3)$, el grado fermiónico en este caso es $m = 2$. Queremos calcular $\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big)$. Para esto veremos los diagramas $\mathcal{S}\Lambda$ y $\mathcal{B}\Lambda$ y el aporte de caja de los diagramas:

$\mathcal{S}\Lambda =$



$$
\mathcal{B}\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|c}
\hline
1-q^4t^3 & & 1-q^2t^2 & 1-qt & \bigcirc \\
\hline
1-q^2t^2 & 1-qt & 1-t & \multicolumn{1}{c}{} & \\
\cline{1-3}
1-qt & \multicolumn{1}{c}{\bigcirc} & & & \\
\cline{1-1}
\end{array}
$$

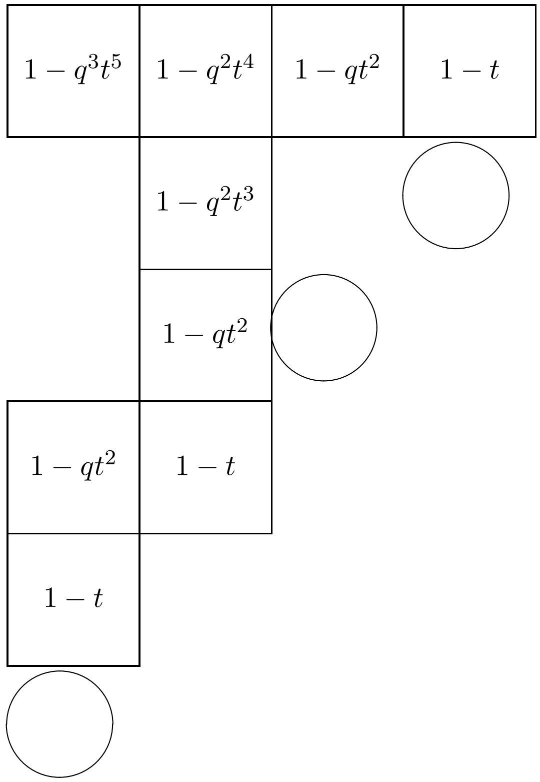
Además no es difícil de ver que $\Lambda' = (2, 0; 3, 2, 1)$, así $n(\Lambda'^a/\delta_2) = 0$, también $|\Lambda^a/\delta_2| = 4, n(\Lambda^a/\delta_2) = 1$ y $n(\mathcal{S}\Lambda) = 6$, entonces

$$
\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_{(4,1;3)}\big) = \frac{t^6}{q^3} \cdot \frac{(1-u)(1-qu)(1-qtu)(1-q^2tu)(1-q^2t^2u)(1-q^3t^2u)(1-q^4t^2u)}{(1-q^4t^3)(1-q^2t^2)^2(1-qt)^3(1-t)}.
$$

Ejemplo 2. Consideremos el diagrama $\Lambda = (3, 2, 0; 4, 2, 1)$, el grado fermiónico en este caso es $m = 3$. Queremos calcular $\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_\Lambda\big)$. Para esto veremos los diagramas $\mathcal{S}\Lambda$ y $\mathcal{B}\Lambda$ y el aporte de cada caja en los respectivos diagramas $\mathcal{S}\Lambda$ y $\mathcal{B}\Lambda$:

$$
\mathcal{S}\Lambda = \begin{array}{cccc}
 & & & \boxed{1-q^3t^3u} \\
 & & \boxed{1-q^2t^2u} & 1-q^3t^2u \\
 & \boxed{1-qtu} & 1-q^2tu & \\
\boxed{1-u} & \boxed{1-qu} & & \\
\boxed{1-t^{-1}u} & & & \\
1-t^{-2}u & & &
\end{array}
$$

$\mathcal{B}\Lambda =$



También vemos que $\Lambda' = (5,2,1;4)$ y por lo tanto $n(\Lambda'^a/\delta_3) = 3$. Además $|\Lambda^a/\delta_3| = 5, n(\Lambda^a/\delta_3) = 2$ y $n(\mathcal{S}\Lambda) = 21$, por lo tanto

$$\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_{(4,1;3)}\big) = \frac{t^{24}}{q^8}\cdot\frac{(1-q^3t^3u)(1-q^2t^2u)(1-q^3t^2u)(1-qtu)(1-q^2tu)(1-u)(1-qu)(1-t^{-1}u)(1-t^{-2}u)}{(1-q^3t^5)(1-q^2t^4)(1-q^2t^3)(1-qt^2)^3(1-t)^3}.$$

Ejemplo 3. Ahora veremos un ejemplo de la evaluación $\widetilde{\mathcal{E}}^m_{u,q,t}$. Consideraremos la misma superpartición $\Lambda = (3,2,0;4,2,1)$ que en el ejemplo anterior. El diagrama $\mathcal{B}\Lambda$ es el mismo que en el ejemplo anterior, necesitamos ver el diagrama $\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda$ y las respectivas potencias de q y t.

$$
\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}
\cline{3-4}
\multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c|}{} & 1-q^2t^2u & 1-q^3t^2u \\
\cline{2-4}
\multicolumn{1}{c|}{} & 1-qtu & 1-q^2tu & \multicolumn{1}{c}{\bigcirc} \\
\cline{1-3}
1-u & 1-qu & \multicolumn{1}{c}{\bigcirc} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-2}
1-t^{-1}u & 1-qt^{-1}u & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-2}
1-t^{-2}u & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} \\
\cline{1-1}
\multicolumn{1}{c}{\bigcirc} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{} & \multicolumn{1}{c}{}
\end{array}
$$

También $\Lambda' = (5,2,1;4)$ y entonces $n((\Lambda')^a/\delta_2) = 4$. Además $|\Lambda^a/\delta_2| = 4, n(\Lambda^a/\delta_2) = 2$ y $n(\widetilde{\mathcal{S}}\Lambda) = 16$; por lo tanto

$$
\mathcal{E}^m_{u,q,t}\big(P_{(3,2,0;4,2,1)}\big) = \frac{t^{20}(1-u)(1-t^{-1}u)(1-t^{-2}u)(1-qtu)(1-qu)(1-qt^{-1}u)(1-q^2tu)(1-q^2t^2u)(1-q^3t^2u)}{q^2(1-q^3t^5)(1-q^2t^4)(1-q^2t^3)(1-qt^2)^3(1-t)^3}.
$$

2. Ejemplo de Norma

Ahora mostraremos un ejemplo de como calcular la norma de un superpolinomio de Macdonald. Recordemos la fórmula mostrada en (155):

$$
\|P_\Lambda\|^2 = q^{|\Lambda^a|} \prod_{s\in\mathcal{B}\Lambda} \frac{1-q^{a_{\Lambda^*}(s)+1}t^{l_{\Lambda^{\circledast}}(s)}}{1-q^{a_{\Lambda^{\circledast}}(s)}t^{l_{\Lambda^*}(s)+1}}.
$$

Calcularemos ahora la norma de P_Λ donde $\Lambda = (4,2,1;3,2)$. La contribución de cada caja del diagrama de $\mathcal{B}\Lambda$ es dado por

$\dfrac{1-q^4t^4}{1-q^4t^5}$			$\dfrac{1-q}{1-qt}$
$\dfrac{1-q^3t^3}{1-q^2t^4}$	$\dfrac{1-q^2t^3}{1-qt^3}$	$\dfrac{1-qt}{1-t}$	
$\dfrac{1-q^2t^2}{1-q^2t^3}$			
$\dfrac{1-q^2t}{1-qt^2}$	$\dfrac{1-qt^2}{1-t}$		
$\dfrac{1-q}{1-qt}$			

Por la tanto la norma cuadra de P_Λ es

$$\begin{aligned}
\|P_\Lambda\|^2 &= q^7 \cdot \frac{(1-q^4t^4)(1-q)^2(1-q^3t^3)(1-q^2t^3)(1-qt)(1-q^2t^2)(1-q^2t)(1-qt^2)}{(1-q^4t^5)(1-qt)^2(1-q^2t^4)(1-qt^3)(1-t)^2(1-q^2t^3)(1-qt^2)} \\
&= q^7 \cdot \frac{(1-q^4t^4)(1-q)^2(1-q^3t^3)(1+qt)(1-q^2t)}{(1-q^4t^5)(1-q^2t^4)(1-qt^3)(1-t)^2}.
\end{aligned}$$

Bibliography

[1] I. G. Macdonald, *Symmetric functions and Hall polynomials*, 2nd ed., Clarendon Press, 1995.

[2] O. Blondeau-Fournier, P. Desrosiers, L. Lapointe and P. Mathieu. *Macdonald polynomials in superspace as eigenfunctions of commuting operators*. Journal of Combinatorics 3, no. 3, 495?562 (2012).

[3] P. Desrosiers, L. Lapointe, P.Mathieu. *Classical symmetric functions in superspace.* J Algebr Comb (2006) 24: 209-238.

[4] D. Marshall,*Symmetric and non-symmetric Macdonald polynomials* Ann. Comb. 3 (1999) 385:415.

[5] W. Baratta, *Some properties of Macdonald polynomials with prescribed symmetry*, Kyushu J. Math. **64** (2010) 323-343.

[6] T. H. Baker and P. J. Forrester, *A q-analogue of the type A Dunkl operator and integral kernel*, Int. Math. Res. Not. **148** (1997) 667-686.

[7] I. G. Macdonald, *Affine Hecke algebras and orthogonal polynomials*, Séminaire Bourbaki 1994-95, exposé 797, p. 189-207.

[8] O. Blondeau-Fournier, P. Desrosiers, L. Lapointe and P. Mathieu, *Macdonald polynomials in superspace: conjectural definition and positivity conjectures*, Lett. Math. Phys. DOI: 10.1007/s11005-011-0542-5, 21 pages.

[9] O. Blondeau-Fournier, P. Desrosiers, L. Lapointe and P. Mathieu, *Macdonald polynomials in superspace as eigenfunctions of commuting operators*, Journal of Combinatorics **3**, no. 3, 495–562 (2012).

[10] J. Gatica, M. Jones and L. Lapointe, Pieri rules for the Jack polynomials in superspace and the 6-vertex model, arXiv:1712.02416.

[11] I. G. Macdonald, *A new class of symmetric functions*, Publ. I.R.M.A. Strasbourg, 372/S-20, Actes 20^e Séminaire Lotharingien (1988), 131–171.

[12] P. Desrosiers, L. Lapointe, and P. Mathieu, Jack polynomials in superspace, Commun. Math. Phys. 242 (2003), 331:360.

[13] Desrosiers, P., Lapointe, L. and Mathieu, *Jack Superpolynomials: Physical and Combinatorial Definitions.* P. Czech J Phys (2004) 54: 1223. https://doi.org/10.1007/s10582-004-9782-2.

[14] Desrosiers, P., Lapointe, L. and Mathieu, *Jack Superpolynomials, Superpartition Ordering and Determinantal Formulas.* P. Commun. Math. Phys. (2003) 233: 383. https://doi.org/10.1007/s00220-002-0731-2.

[15] P. Desrosiers, L. Lapointe, and P. Mathieu, *Orthogonality of Jack polynomials in superspace,* Adv. Math. 212 (2007),361:388.

[16] P. Desrosiers, L. Lapointe, and P. Mathieu, *Evaluation and normalization of Jack polynomials in superspace*, Int. Math. Res. Not. (2012), 5267:5327.

[17] P.J. Forrester and D.S. McAnally, *Pieri-type formulas for the non-symmetric Jack polynomials*, Comment. Math. Helv. **79** (2004), 1–24.

[18] M. Jones and L. Lapointe, *Pieri rules for Schur functions in superspace*, J. Combin. Theory Ser. A **148** (2017), 57–115.

[19] F. Knop, *Symmetric and nonsymmetric quantum Capelli polynomials*, Comment. Math. Helv. **72** (1997), 84–100.

[20] O. Blondeau-Fournier, *Les polynômes de Macdonald dans le superespace et le modèle Ruijsenaars-Schneider supersymétrique*, Ph.D. thesis, Université Laval, 2014.

[21] P. Desrosiers, L. Lapointe and P. Mathieu. *Jack superpolynomials with negative fractional parameter: clustering properties and super-Virasoro ideals*, Commun. Math. Phys. 316, 395-440 (2012).

[22] O. Blondeau-Fournier, L. Lapointe and P. Mathieu, *Double Macdonald polynomials as the stable limit of Macdonald superpolynomials*, J. Algebr. Comb. **41**, 397–459 (2015).

[23] A.M. Garsia and M. Haiman, *A graded representation model for Macdonald polynomials*, Proc. Nat. Acad. Sci. USA **99** (1993) 3607–10.

[24] M. Haiman, *Hilbert schemes, polygraphs, and the Macdonald positivity conjecture*, J. Amer. Math. Soc. **14** (2001) 941–1006.
[25] M. Haiman, *Combinatorics, symmetric functions and Hilbert Schemes*, Curr. Dev. in Math. (2001) 30–111.
[26] J. Haglund, M. Haiman, and N. Loehr, *A combinatorial formula for Macdonald polynomials*, J. Amer. Math. Soc. 18 (2005), no. 3, 735-761