Propiedades cualitativas de Familias Resolventes de operadores

Aldo Pereira

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Contenidos

1 Introducción
- Origen
- Problema
- Objetivo

2 Propiedades
- Continuidad uniforme
- Compacidad
- Propiedades espectrales
- Teorema espectral

Origen del problema

- (Cauchy, 1821) Determinar funciones $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\phi(x + y) = \phi(x)\phi(y) \tag{1}$$

para todo $x, y \geq 0$, y $\phi(0) = 1$.

Origen del problema

- (Cauchy, 1821) Determinar funciones $\phi : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ tales que

$$\phi(x+y) = \phi(x)\phi(y) \tag{1}$$

para todo $x, y \geq 0$, y $\phi(0) = 1$.

- La función $T(t) = e^{at}$, para $a \in \mathbb{C}$ es diferenciable y satisface

$$\left\{ \begin{array}{rcl} T'(t) & = & aT(t) \\ T(0) & = & 1 \end{array} \right. \tag{2}$$

- Si $T : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{C}$ es continua y satisface (1), es diferenciable y existe un único $a \in \mathbb{C}$ tal que verifica (2).

Generalizaciones

- *Exponencial de una matriz* $e^{At} = \sum \frac{t^n}{n!} A^n$. Con esto la ecuación $u' = Au + f$ tiene por solución

$$u(t) = e^{At}u(0) + \int_0^t e^{A(t-s)} f(s)\, ds.$$

- Caso infinito dimensional: uso de herramientas de análisis funcional, que llevaron al *problema abstracto de Cauchy.*

Ejemplo

Consideramos el problema del calor en $\Omega = (0, \pi)$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t(x,t) & = & u_{xx}(x,t), \\ u(0,t) & = & u(\pi,t), \\ u(x,0) & = & g(x), \end{array} \right.$$

Sea $A = \frac{d^2}{dx^2}$ con dominio $D(A)$ apropiado. Con esto, el problema puede escribirse en forma abstracta como

$$u'(t) = Au(t), \quad u(0) = g.$$

Usando separación de variables, la solución está dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t}\, sen(kx).$$

Para cada $t \geq 0$ y $v \in L^2(\Omega)$, se define el operador lineal U como

$$U(t)v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e^{-k^2 t}\, sen(kx), \quad v_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(x)\, sen(kx)\, dx.$$

Así, se tiene $U(0)v = v$, y $U(t+s)v = U(t)U(s)v$.

Usando separación de variables, la solución está dada por

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k e^{-k^2 t}\, sen(kx).$$

Para cada $t \geq 0$ y $v \in L^2(\Omega)$, se define el operador lineal U como

$$U(t)v = \sum_{k=1}^{\infty} v_k e^{-k^2 t}\, sen(kx), \quad v_k = \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} v(x)\, sen(kx)\, dx.$$

Así, se tiene $U(0)v = v$, y $U(t+s)v = U(t)U(s)v$.

Denotaremos por A un operador lineal (no necesariamente acotado) y cerrado en un espacio de Banach X, f una función X-valuada, y $t \geq 0$.

Problemas en abstracto

Problema abstracto de Cauchy: para $u_0, u_1 \in D(A)$ y f apropiada,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & Au(t) + f(t) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u''(t) & = & Au(t) + f(t) \\ u(0) & = & u_0 \\ u'(0) & = & u_1 \end{array} \right. \tag{4}$$

Problemas en abstracto

Problema abstracto de Cauchy: para $u_0, u_1 \in D(A)$ y f apropiada,

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u'(t) & = & Au(t) + f(t) \\ u(0) & = & u_0 \end{array} \right. \tag{3}$$

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u''(t) & = & Au(t) + f(t) \\ u(0) & = & u_0 \\ u'(0) & = & u_1 \end{array} \right. \tag{4}$$

Ecuación integrodiferencial: Para $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y f apropiada,

$$u(t) = f(t) + \int_0^t a(t-s)Au(s)\,ds. \tag{5}$$

Ecuaciones funcionales

Para cada ecuación, existe una familia de operadores que satisface la siguiente *ecuación funcional*:

- Problema de 1er. orden: $T(t+s) = T(t)T(s)$;
- Problema de 2do. orden: $C(t+s) + C(t-s) = 2C(t)C(s)$;
- Ecuación integral: otras ecuaciones.

Soluciones débiles

Para la ecuación (3), si A genera un c_0-*semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds.$$

Soluciones débiles

Para la ecuación (3), si A genera un c_0-*semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds.$$

Para la ecuación (4), si A genera una *familia coseno* $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ fuertemente continua, y asociada a una *familia seno* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$,

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds.$$

Soluciones débiles

Para la ecuación (3), si A genera un *c_0-semigrupo* $\{T(t)\}_{t\geq 0}$,

$$u(t) = T(t)u_0 + \int_0^t T(t-s)f(s)\,ds.$$

Para la ecuación (4), si A genera una *familia coseno* $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ fuertemente continua, y asociada a una *familia seno* $\{S(t)\}_{t\geq 0}$,

$$u(t) = C(t)u_0 + S(t)u_1 + \int_0^t S(t-s)f(s)\,ds.$$

Para la ecuación (5), si A genera una *familia resolvente* $\{R(t)\}_{t\geq 0}$,

$$u(t) = R(t)f(0) + \int_0^t R(t-s)f'(s)\,ds.$$

Familias resolventes

Para cada ecuación, las familias resolventes respectivas verifican, entre otras propiedades, las siguientes *ecuaciones resolventes:*

$$T(t): \qquad T(t)x = x + \int_0^t T(s)Ax\,ds, \quad x \in D(A),$$

$$C(t): \qquad C(t)x = x + \int_0^t (t-s)C(s)Ax\,ds, \quad x \in D(A),$$

$$R(t): \qquad R(t)x = x + \int_0^t a(t-s)R(s)Ax\,ds, \quad x \in D(A).$$

El caso general de (5) considera dos núcleos: $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $k \in C(\mathbb{R}_+)$. La familia $R(t)$ se llama (a,k)-*regularizada*, con ecuación resolvente

$$R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AR(s)x\,ds, \quad x \in X. \tag{6}$$

Esto unifica las nociones de c_0-semigrupos, familias coseno, semigrupos integrados, familias resolventes, entre otras.

El caso general de (5) considera dos núcleos: $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$, $k \in C(\mathbb{R}_+)$. La familia $R(t)$ se llama (a,k)-*regularizada*, con ecuación resolvente

$$R(t)x = k(t)x + \int_0^t a(t-s)AR(s)x\,ds, \quad x \in X. \tag{6}$$

Esto unifica las nociones de c_0-semigrupos, familias coseno, semigrupos integrados, familias resolventes, entre otras.
Esta familia verifica la siguiente ecuación funcional:

$$R(s)(a*R)(t) - (a*R)(s)R(t) = k(s)(a*R)(t) - k(t)(a*R)(s).$$

Objetivo fundamental

Estudio de propiedades cualitativas de familias resolventes.

Objetivo fundamental

Estudio de propiedades cualitativas de familias resolventes.

En particular, se estudian las siguientes:

- Continuidad uniforme,
- Compacidad,
- Propiedades espectrales y existencia de soluciones,
- Teorema espectral.

Definiciones

Sea $R(t)$ familia de operadores generados por A.

Definiciones

Sea $R(t)$ familia de operadores generados por A.

1. Se llama *operador resolvente* a la expresión

$$\widehat{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(t)x\,dt, \quad x \in X,\ Re(\lambda) > \omega.$$

2. *Conjunto resolvente de A:* $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \widehat{R}(\lambda) \text{ biyectiva}\}$.
3. *Espectro de A:* $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Definiciones

Sea $R(t)$ familia de operadores generados por A.

1. Se llama *operador resolvente* a la expresión

$$\widehat{R}(\lambda)x = \int_0^\infty e^{-\lambda t} R(t)x\, dt, \quad x \in X,\ Re(\lambda) > \omega.$$

2. *Conjunto resolvente de A:* $\rho(A) = \{\lambda \in \mathbb{C} : \widehat{R}(\lambda) \text{ biyectiva}\}$.
3. *Espectro de A:* $\sigma(A) = \mathbb{C} \setminus \rho(A)$.

Por ejemplo,

$$\widehat{T}(\lambda) = (\lambda - A)^{-1}, \quad \widehat{C}(\lambda) = \lambda(\lambda^2 - A)^{-1}, \quad \widehat{S}(\lambda) = (\lambda^2 - A)^{-1}.$$

Caracterización de continuidad uniforme

- Objetivo: caracterizar continuidad uniforme de familias resolventes.

Caracterización de continuidad uniforme

- Objetivo: caracterizar continuidad uniforme de familias resolventes.
- Ayuda a determinar criterios útiles para existencia de soluciones a ecuaciones diferenciales parciales no lineales.
- Aplicaciones: argumentos de punto fijo que reemplazan la hipótesis de compacidad por cierto comportamiento de la familia resolvente.

Esta etapa de la Tesis tiene como objetivos:

- En espacios de Hilbert, estudiar la continuidad en norma de familias (a, k)-regularizadas en términos del decaimiento de $H(\lambda) = \widehat{k}(\lambda)(I - \widehat{a}(\lambda)A)^{-1}$ a lo largo de un eje imaginario.

Esta etapa de la Tesis tiene como objetivos:

- En espacios de Hilbert, estudiar la continuidad en norma de familias (a, k)-regularizadas en términos del decaimiento de $H(\lambda) = \widehat{k}(\lambda)(I - \widehat{a}(\lambda)A)^{-1}$ a lo largo de un eje imaginario.

- En espacios de Grothendieck con la propiedad de Dunford-Pettis (como espacios de tipo L^∞), estudiar la continuidad uniforme de familias (a, k)-regularizadas.

Caso c_0-semigrupos

Para espacios de Hilbert se conocen:

- $\{T(t)\}_{t>0}$ es continuo en norma si y solo si cuando $|\tau| \to \infty$, $\|(i\tau - A)^{-1}\| \to 0$.

- $\{T(t)\}_{t>0}$ es continuo en norma si y solo si para $\mu \geq \omega$, $\|(\mu + i\tau - A)^{-1}\| \to 0$ cuando $|\tau| \to \infty$.

Caso $a \in L^1_{loc}(\mathbb{R}_+)$ y $k(t) \equiv 1$

- En un espacio de Hilbert, la familia resolvente $\{R(t)\}_{t>0}$ es continua en norma si y solo si para $\omega_0 > \omega$ y $\lambda = \omega_0 + i\tau$, $\|(\lambda - \widehat{a}(\lambda)A)^{-1}\| \to 0$ cuando $|\tau| \to \infty$.
- Para espacios de Grothendieck con la propiedad de Dunford - Pettis, toda familia resolvente exponencialmente acotada es uniformemente continua.

Caracterización de compacidad

El objetivo es caracterizar compacidad de familias resolventes con $a = g_\alpha(t) = \frac{t^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)}$, $k = 1$; aquí, A genera una *familia α-resolvente* $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ con ecuación resolvente

$$S_\alpha(t)x = x + \int_0^t g_\alpha(t-s)AS_\alpha(s)x\,ds, \quad x \in D(A).$$

El caso $1 \leq \alpha \leq 2$ se considera interpolación entre (3) y (4).

Esta familia resolvente se relaciona con la ecuación diferencial

$$D_t^{\alpha} u(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 < \alpha \leq 2,\ t \geq 0. \tag{7}$$

Esta familia resolvente se relaciona con la ecuación diferencial

$$D_t^\alpha u(t) = Au(t) + f(t), \quad 0 < \alpha \leq 2,\ t \geq 0. \tag{7}$$

- Para $0 < \alpha \leq 1$, la solución débil de (7) está dada por

$$u(t) = S_\alpha(t)x + (g_{1-\alpha} * S_\alpha * f)(t).$$

- Para $1 < \alpha \leq 2$, la solución débil de (7) está dada por

$$u(t) = S_\alpha(t)x + \int_0^t S_\alpha(s)y\, ds + (g_{\alpha-1} * S_\alpha * f)(t).$$

Esta etapa de la Tesis tiene como objetivos específicos:

- Para $\alpha \in (0,2)$: caracterizar la compacidad de la familia $S_\alpha(t)$.

Esta etapa de la Tesis tiene como objetivos específicos:

- Para $\alpha \in (0, 2)$: caracterizar la compacidad de la familia $S_\alpha(t)$.
- Aplicaciones a la existencia de soluciones a problemas fraccionarios semilineales con condiciones iniciales no locales.

Criterios para α entero

- $\alpha = 1$: $\{T(t)\}_{t>0}$ es compacto si y solo si, $\{T(t)\}_{t>0}$ es uniformemente continuo y $(\lambda - A)^{-1}$ es compacto para cada $\lambda \in \rho(A)$.
- $\alpha = 2$: Una familia seno $\{S(t)\}_{t>0}$ fuertemente continua es compacta si y solo si $(\lambda^2 - A)^{-1}$ es compacto para algún λ y por tanto para cada $\lambda \in \rho(A)$.
- Sin embargo, una familia coseno $C(t)$ no puede ser compacta.

Criterios para $0 < \alpha < 1$

Para este caso, la compacidad se ha estudiado y probado por métodos diversos:

- Usando subordinación: A genera un semigrupo $T(t)$ compacto, y luego se obtiene una familia $S_\alpha(t)$ compacta;
- Suponiendo que A es casi sectorial y que $(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ es compacto, $S_\alpha(t)$ es unif. continua, luego compacta;
- Si $S_\alpha(t)$ es unif. continua: $S_\alpha(t)$ es compacta si y solo si $(\lambda^\alpha - A)^{-1}$ es compacta para todo $\lambda \in \rho(A)$.

Propiedades espectrales y existencia de soluciones

- Problema original: dado un c_0-semigrupo $T(t)$ de operadores acotados generado por A, describir $\sigma(T(t))$ en términos de A.

Propiedades espectrales y existencia de soluciones

- Problema original: dado un c_0-semigrupo $T(t)$ de operadores acotados generado por A, describir $\sigma(T(t))$ en términos de A.
- Idea: Considerar los problemas (3) y (4), y usar la conexión entre el espectro de $R(t)$ y la existencia y unicidad de soluciones débiles de la ecuación correspondiente.
- Aplicaciones: propiedades de estabilidad exponencial de la familia $R(t)$ correspondiente.

Esta etapa de la Tesis tiene como objetivos:

- Considerar la ecuación fraccionaria (7), para estudiar propiedades espectrales de la familia $\{S_\alpha(t)\}_{t\geq 0}$ en el caso $1 < \alpha < 2$.
- Relación entre el espectro de $S_\alpha(t)$ y la existencia de soluciones débiles para el problema fraccionario (7).

Resultados para $0 < \alpha \leq 1$

Para $0 < \alpha < 1$, en espacios de Banach se verifica:

- $1 \in \rho(S_\alpha(1))$ si y solo si para toda $f \in L^1([0,1], X)$ la ecuación (7) admite una única solución débil.

Resultados para $0 < \alpha \leq 1$

Para $0 < \alpha < 1$, en espacios de Banach se verifica:

- $1 \in \rho(S_\alpha(1))$ si y solo si para toda $f \in L^1([0,1], X)$ la ecuación (7) admite una única solución débil.

Para $\alpha = 1$, en espacios de Banach se verifica:

- $1 \in \rho(T(1))$ si y solo si para toda $f \in L^1([0,1], X)$ la ecuación (3) admite una única solución débil 1-periódica.

Resultados para $\alpha = 2$

Para espacios de Hilbert se verifica:

- $1 \in \rho(S(1))$ si y solo si para toda $f \in L^1([0, T], X)$ 1-periódica, la ecuación (4) admite una única solución débil 1-periódica.

Sin embargo, no es posible obtener estabilidad exponencial para la familia coseno.

Teorema espectral

- Problema original: dado un c_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, bajo cuáles condiciones en A o $T(t)$ vale el *teorema espectral*

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)), \quad t > 0. \tag{8}$$

Teorema espectral

- Problema original: dado un c_0-semigrupo $\{T(t)\}_{t\geq 0}$, bajo cuáles condiciones en A o $T(t)$ vale el *teorema espectral*

$$e^{t\sigma(A)} = \sigma(T(t)), \quad t > 0. \tag{8}$$

- La inclusión siguiente siempre es válida:

$$e^{t\sigma(A)} \subset \sigma(T(t)), \quad t > 0. \tag{9}$$

- La inclusión inversa puede fallar de manera bastante notable, ya sea por condiciones analíticas en A o geométricas en X.

Esta etapa de la Tesis tiene como objetivo:

Estudiar generalizaciones del teorema espectral (8) para familias resolventes (en particular, el caso de).

Caso de familias coseno

- Para la familia $\{C(t)\}_{t\geq 0}$ se tiene la extensión de (9)

$$\cosh(t\sqrt{\sigma(A)}) \subset \sigma(C(t)), \quad t \in \mathbb{R}.$$

- La inclusión opuesta falla en general.

Caso de semigrupos integrados

- Si $T_\alpha(t)$ es un semigrupo α veces integrado, se tiene

$$\sigma_p(T_\alpha(t)) \cup \{0\} = \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda s}\, ds : \lambda \in \sigma_p(A) \right\} \cup \{0\},$$

que también se tiene para el espectro aproximado y residual.

Caso de semigrupos integrados

- Si $T_\alpha(t)$ es un semigrupo α veces integrado, se tiene

$$\sigma_p(T_\alpha(t))\cup\{0\} = \left\{ \int_0^t \frac{(t-s)^{\alpha-1}}{\Gamma(\alpha)} e^{\lambda s}\, ds : \lambda \in \sigma_p(A) \right\} \cup \{0\},$$

que también se tiene para el espectro aproximado y residual.

- Si $T_n(t)$ es un semigrupo n veces integrado, se tiene

$$\sigma(T_n(t)) \cup \{0\} = \left\{ \frac{e^{\lambda t}}{\lambda^n} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{t^k}{k!\lambda^{n-k}} : \lambda \in \sigma(A) \right\} \cup \{0\}.$$