Teoría de representaciones graduadas de las álgebras de Temperley-Lieb de tipo A y B.

David Plaza

Instituto de Matemática y Física
Universidad de Talca

Proyecto de Tesis

Álgebras y módulos graduados.

Definición (Álgebras graduadas)

Sea R un dominio de integridad y A un R-álgebra libre de rango finito. Diremos que A es un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada si A admite R-submódulos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que:

- $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$
- $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para todo $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$

Si $a \in A_i$ diremos que a es un elemento homogeneo de grado i

Álgebras y módulos graduados.

Definición (Álgebras graduadas)

Sea R un dominio de integridad y A un R-álgebra libre de rango finito. Diremos que A es un álgebra $\mathbb{Z}$-graduada si A admite R-submódulos $\{A_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$ tales que:

- $A = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} A_i$
- $A_i A_j \subseteq A_{i+j}$ para todo $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$

Si $a \in A_i$ diremos que a es un elemento homogeneo de grado i

Definición (Módulos graduados)

Diremos que un A-módulo M es graduado si admite una familia de R-submódulos $\{M_i\}_{i\in\mathbb{Z}}$, tales que:

- $M = \bigoplus_{i\in\mathbb{Z}} M_i$
- $A_i M_j \subseteq M_{i+j}$ para todo $(i,j) \in \mathbb{Z}^2$

Álgebras y módulos graduados.

Si M es un A-módulo graduado, para todo $j \in \mathbb{Z}$ denotemos por $M\langle j\rangle$ al A-módulo graduado obtenido a partir de M desplazando la graduación en j, es decir:

$$M\langle j\rangle_i = M_{i-j} \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}$$

Álgebras y módulos graduados.

Si M es un A-módulo graduado, para todo $j \in \mathbb{Z}$ denotemos por $M\langle j\rangle$ al A-módulo graduado obtenido a partir de M desplazando la graduación en j, es decir:

$$M\langle j\rangle_i = M_{i-j} \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}$$

Teorema

Asumamos que R es un cuerpo. Si M es un A-módulo simple, entonces M admite una única graduación salvo desplazamiento en la graduación.

Álgebras y módulos graduados.

Si M es un A-módulo graduado, para todo $j \in \mathbb{Z}$ denotemos por $M\langle j\rangle$ al A-módulo graduado obtenido a partir de M desplazando la graduación en j, es decir:

$$M\langle j\rangle_i = M_{i-j} \qquad \text{para todo } i \in \mathbb{Z}$$

Teorema

Asumamos que R es un cuerpo. Si M es un A-módulo simple, entonces M admite una única graduación salvo desplazamiento en la graduación.

Sea M es un A-módulo graduado, denotamos por

$$[M : L]^{gr}$$

a la multiplicidad del A-módulo simple graduado L en una serie de composición graduada de M.

El álgebra de Temperley-Lieb y el blob algebra.

El álgebra de Temperley-Lieb y el blob algebra.

Fijemos $q, y_e \in \mathbb{C}^{\times}$, con $q^2 \neq 1$. Para $k \in \mathbb{Z}$ definimos $[k] = [k]_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$.

El álgebra de Temperley-Lieb y el blob algebra.

Fijemos $q, y_e \in \mathbb{C}^{\times}$, con $q^2 \neq 1$. Para $k \in \mathbb{Z}$ definimos $[k] = [k]_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$.

Álgebra de Temperley-Lieb $Tl_n(q)$

Generadores: $\{U_1, \ldots, U_{n-1}\}$

Relaciones:

$$
\begin{array}{ll}
U_i^2 = -[2] U_i & \text{si } 1 \leq i < n \\
U_i U_j U_i = U_i & \text{si } |i-j| = 1 \\
U_i U_j = U_j U_i & \text{si } |i-j| > 1
\end{array}
$$

El álgebra de Temperley-Lieb y el blob algebra.

Fijemos $q, y_e \in \mathbb{C}^{\times}$, con $q^2 \neq 1$. Para $k \in \mathbb{Z}$ definimos $[k] = [k]_q := \frac{q^k - q^{-k}}{q - q^{-1}}$.

Álgebra de Temperley-Lieb $Tl_n(q)$

Generadores: $\{U_1, \ldots, U_{n-1}\}$
Relaciones:

$$\begin{aligned} U_i^2 &= -[2]U_i && \text{si } 1 \leq i < n \\ U_i U_j U_i &= U_i && \text{si } |i-j| = 1 \\ U_i U_j &= U_j U_i && \text{si } |i-j| > 1 \end{aligned}$$

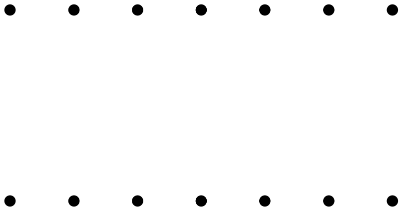
Blob algebra $b_n(q, y_e)$

Generadores: $\{U_1, \ldots, U_{n-1}, e\}$
Relaciones: Se satisfacen las mismas relaciones que en $Tl_n(q)$, junto con las relaciones adicionales

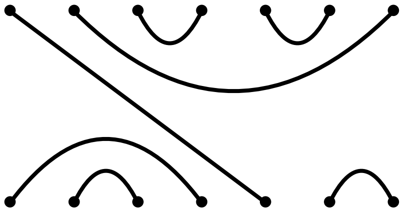
$$\begin{aligned} e^2 &= e && \\ U_1 e U_1 &= y_e U_1 && \\ U_i e &= e U_i && \text{si } 2 \leq i < n \end{aligned}$$

Realización por diagramas de $TI_n(q)$

Realización por diagramas de $TL_n(q)$



Realización por diagramas de $TL_n(q)$

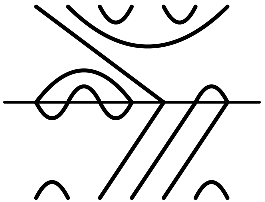


Realización por diagramas de $TL_n(q)$

Denotamos por $\mathbb{T}(n)$ al conjunto de todos los (n, n)-diagramas de Temperley-Lieb. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{T}(n)$ mediante concadenación de diagramas:

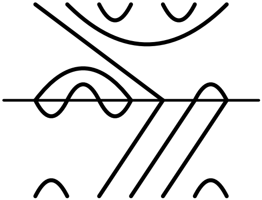
Realización por diagramas de $TI_n(q)$

Denotamos por $\mathbb{T}(n)$ al conjunto de todos los (n, n)-diagramas de Temperley-Lieb. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{T}(n)$ mediante concadenación de diagramas:

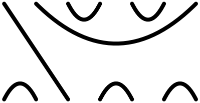


Realización por diagramas de $TI_n(q)$

Denotamos por $\mathbb{T}(n)$ al conjunto de todos los (n,n)-diagramas de Temperley-Lieb. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{T}(n)$ mediante concadenación de diagramas:

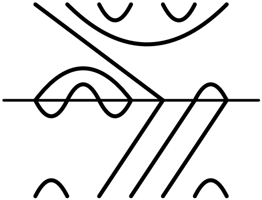


$= -[2]$

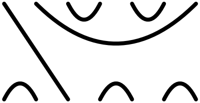


Realización por diagramas de $TL_n(q)$

Denotamos por $\mathbb{T}(n)$ al conjunto de todos los (n,n)-diagramas de Temperley-Lieb. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{T}(n)$ mediante concadenación de diagramas:



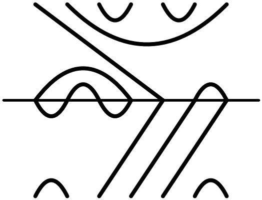
$$= -[2]$$



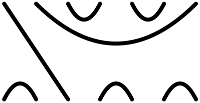
Con estas definiciones $\mathbb{C}\mathbb{T}(n)$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-álgebra asociativa y unital.

Realización por diagramas de $TI_n(q)$

Denotamos por $\mathbb{T}(n)$ al conjunto de todos los (n, n)-diagramas de Temperley-Lieb. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{T}(n)$ mediante concadenación de diagramas:

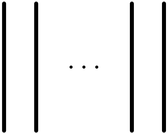


$= -[2]$



Con estas definiciones $\mathbb{C}\mathbb{T}(n)$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-álgebra asociativa y unital.

$1 =$



Realización por diagramas de $TI_n(q)$

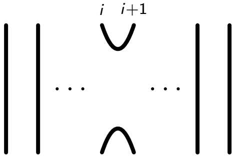
La realización por diagramas de $TI_n(q)$ se refiere al isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras:

$$\begin{array}{rccc} f: & TI_n(q) & \rightarrow & \mathbb{CT}(n) \\ \\ & U_i & \rightarrow & U_i \end{array}$$

Realización por diagramas de $TL_n(q)$

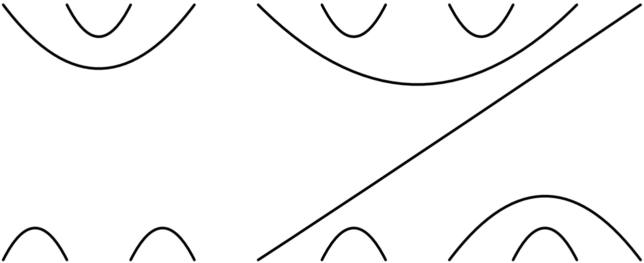
La realización por diagramas de $TL_n(q)$ se refiere al isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras:

$$\begin{aligned} f: \quad TL_n(q) &\rightarrow \mathbb{C}\mathbb{T}(n) \\ \\ U_i &\rightarrow U_i \end{aligned}$$

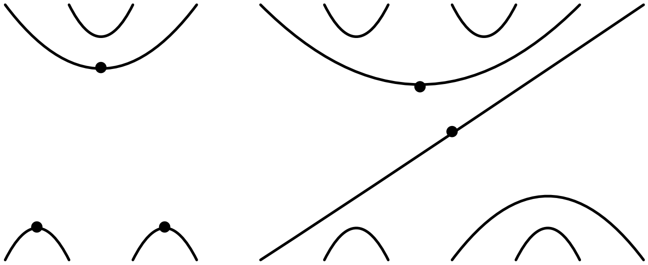
$U_i =$ 

Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$

Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$



Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$

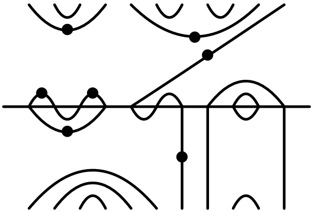


Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$

Denotamos por $\mathbb{B}(n)$ al conjunto de todos los (n, n)-diagramas de Temperley-Lieb marcados. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{B}(n)$ mediante concadenación de diagramas:

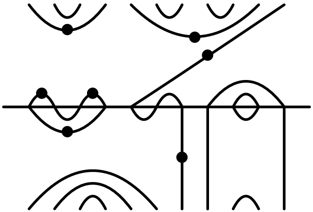
Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$

Denotamos por $\mathbb{B}(n)$ al conjunto de todos los (n, n)-diagramas de Temperley-Lieb marcados. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{B}(n)$ mediante concadenación de diagramas:

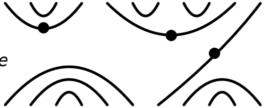


Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$

Denotamos por $\mathbb{B}(n)$ al conjunto de todos los (n, n)-diagramas de Temperley-Lieb marcados. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{B}(n)$ mediante concadenación de diagramas:

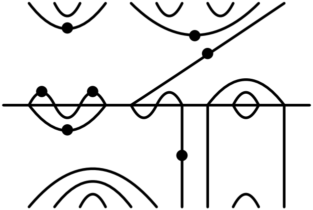


$$= -[2]y_e$$

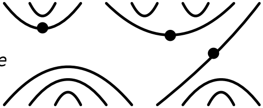


Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$

Denotamos por $\mathbb{B}(n)$ al conjunto de todos los (n, n)-diagramas de Temperley-Lieb marcados. Entonces podemos definir una multiplicación sobre $\mathbb{C}\mathbb{B}(n)$ mediante concadenación de diagramas:



$= -[2]y_e$



Con estas definiciones $\mathbb{C}\mathbb{B}(n)$ tiene estructura de $\mathbb{C}$-álgebra asociativa y unital.

Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$

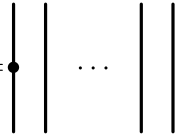
La realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$ se refiere al isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras:

$$
\begin{array}{rccc}
f: & b_n(q, y_e) & \rightarrow & \mathbb{C}\mathbb{B}(n) \\
 & & & \\
 & U_i & \rightarrow & U_i \\
 & e & \rightarrow & e
\end{array}
$$

Realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$

La realización por diagramas de $b_n(q, y_e)$ se refiere al isomorfismo de $\mathbb{C}$-álgebras:

$$\begin{array}{rccc} f: & b_n(q, y_e) & \rightarrow & \mathbb{C}\mathbb{B}(n) \\ \\ & U_i & \rightarrow & U_i \\ & e & \rightarrow & e \end{array}$$

$e =$ 

Teoría de representaciones de $Tl_n(q)$ y $b_n(q, y_e)$

???

Aqui dire algo sobre semisimplicidad y la eleccion de los parametros ...

Álgebras celulares

Álgebras celulares

Sea R un dominio de integridad y A un R-álgebra libre de rango finito. Supongamos que $(\Lambda, \geq)$ es un conjunto finito parcialmente ordenado y que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un conjunto de indices $T(\lambda)$ y elementos $c_{st}^{\lambda} \in A$ para todo $s, t \in T(\lambda)$ tales que

$$\mathcal{C} = \{c_{st}^{\lambda} | \lambda \in \Lambda \ ; \ s, t \in T(\lambda)\}$$

es una base de A. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea A^{λ} el R-submodulo de A con base $\mathcal{C} = \{c_{uv}^{\mu} | \mu \in \Lambda, \mu > \lambda \ ; \ u, v \in T(\mu)\}$.

Álgebras celulares

Sea R un dominio de integridad y A un R-álgebra libre de rango finito. Supongamos que $(\Lambda, \geq)$ es un conjunto finito parcialmente ordenado y que para cada $\lambda \in \Lambda$ existe un conjunto de indices $T(\lambda)$ y elementos $c_{st}^{\lambda} \in A$ para todo $s, t \in T(\lambda)$ tales que

$$\mathcal{C} = \{c_{st}^{\lambda} | \lambda \in \Lambda \,;\, s, t \in T(\lambda)\}$$

es una base de A. Para cada $\lambda \in \Lambda$ sea A^{λ} el R-submodulo de A con base $\mathcal{C} = \{c_{uv}^{\mu} | \mu \in \Lambda, \mu > \lambda \,;\, u, v \in T(\mu)\}$.

Definición (Álgebras celulares)

El par $(\mathcal{C}, \Lambda)$ es una *base celular* de A si:
(1) $* : A \to A$ determinada por ${c_{st}^{\lambda}}^* = c_{ts}^{\lambda}$ es un anti-automorfismo de A; y
(2) Para cada $\lambda \in \Lambda$, $s \in T(\lambda)$ y $a \in A$ existen $r_u \in R$ tales que para todo $t \in T(\lambda)$

$$a c_{st}^{\lambda} \equiv \sum_{u \in T(\lambda)} r_u c_{ut}^{\lambda} \mod A^{\lambda}$$

Si A tiene una base celular diremos que que A es un algebra celular.

Definición (Módulos celulares)

Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos el módulo celular $C(\lambda)$ como el A-módulo que es libre como un R-módulo con base $\{c_t^\lambda | t \in T(\lambda)\}$ y donde para cada $a \in A$

$$ac_t^\lambda = \sum_{u \in T(\lambda)} r_u c_u^\lambda$$

Definición (Módulos celulares)

Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos el módulo celular $C(\lambda)$ como el A-módulo que es libre como un R-módulo con base $\{c_t^\lambda | t \in T(\lambda)\}$ y donde para cada $a \in A$

$$ac_t^\lambda = \sum_{u \in T(\lambda)} r_u c_u^\lambda$$

Para cada $C(\lambda)$ existe una única aplicación bilineal $\langle \ , \ \rangle : C(\lambda) \times C(\lambda) \to R$ determinada por $c_{as}^\lambda c_{tb}^\lambda \equiv \langle c_s^\lambda, c_t^\lambda \rangle c_{ab}^\lambda \mod A^\lambda$, donde $a, b, s, t \in T(\lambda)$.

Definición (Módulos celulares)

Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos el módulo celular $C(\lambda)$ como el A-módulo que es libre como un R-módulo con base $\{c_t^\lambda | t \in T(\lambda)\}$ y donde para cada $a \in A$

$$ac_t^\lambda = \sum_{u \in T(\lambda)} r_u c_u^\lambda$$

Para cada $C(\lambda)$ existe una única aplicación bilineal $\langle \ , \ \rangle : C(\lambda) \times C(\lambda) \to R$ determinada por $c_{as}^\lambda c_{tb}^\lambda \equiv \langle c_s^\lambda, c_t^\lambda \rangle c_{ab}^\lambda \mod A^\lambda$, donde $a, b, s, t \in T(\lambda)$.

$$\mathrm{rad}(C(\lambda)) := \{x \in C(\lambda) | \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in C(\lambda)\}$$

Definición (Módulos celulares)

Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos el módulo celular $C(\lambda)$ como el A-módulo que es libre como un R-módulo con base $\{c_t^\lambda | t \in T(\lambda)\}$ y donde para cada $a \in A$

$$ac_t^\lambda = \sum_{u \in T(\lambda)} r_u c_u^\lambda$$

Para cada $C(\lambda)$ existe una única aplicación bilineal $\langle \ , \ \rangle : C(\lambda) \times C(\lambda) \to R$ determinada por $c_{as}^\lambda c_{tb}^\lambda \equiv \langle c_s^\lambda, c_t^\lambda \rangle c_{ab}^\lambda \mod A^\lambda$, donde $a, b, s, t \in T(\lambda)$.

$$\mathrm{rad}(C(\lambda)) := \{x \in C(\lambda) | \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in C(\lambda)\}$$

$$D(\lambda) := C(\lambda)/\mathrm{rad}(C(\lambda)) \qquad \Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda | D(\lambda) \neq 0\}$$

Definición (Módulos celulares)

Para cada $\lambda \in \Lambda$ definimos el módulo celular $C(\lambda)$ como el A-módulo que es libre como un R-módulo con base $\{c_t^\lambda | t \in T(\lambda)\}$ y donde para cada $a \in A$

$$ac_t^\lambda = \sum_{u \in T(\lambda)} r_u c_u^\lambda$$

Para cada $C(\lambda)$ existe una única aplicación bilineal $\langle \ , \ \rangle : C(\lambda) \times C(\lambda) \to R$ determinada por $c_{as}^\lambda c_{tb}^\lambda \equiv \langle c_s^\lambda, c_t^\lambda \rangle c_{ab}^\lambda \mod A^\lambda$, donde $a, b, s, t \in T(\lambda)$.

$$\operatorname{rad}(C(\lambda)) := \{x \in C(\lambda) | \langle x, y \rangle = 0 \text{ para todo } y \in C(\lambda)\}$$

$$D(\lambda) := C(\lambda)/\operatorname{rad}(C(\lambda)) \qquad \Lambda_0 = \{\lambda \in \Lambda | D(\lambda) \neq 0\}$$

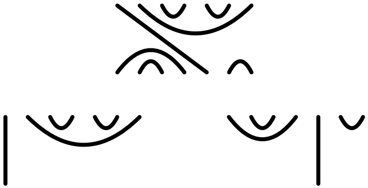
Teorema (Graham-Lehrer)

Si R es un cuerpo entonces $\{D(\lambda) | \lambda \in \Lambda_0\}$ es un conjunto completo de A-módulos simples no isomorfos de a pares.

Base celular para $TL_n(q)$

Base celular para $TI_n(q)$

Base celular para $TL_n(q)$

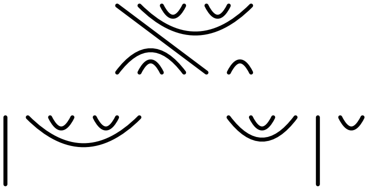


Base celular para $TL_n(q)$

1	4
2	6
3	7
5	

1	3
2	4
5	7
6	

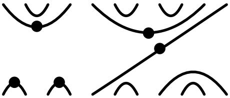
Base celular para $Tl_n(q)$



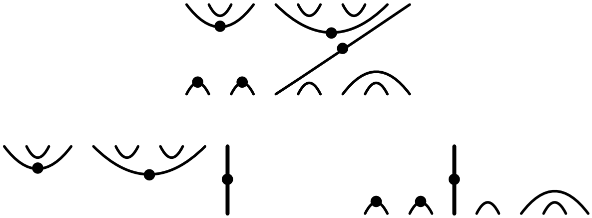
$$\begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 6 \\ \hline 3 & 7 \\ \hline 5 & \\ \cline{1-1} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 & 7 \\ \hline 6 & \\ \cline{1-1} \end{array}$$

- $\Lambda = \mathrm{Par}_2(n)$
- Λ es ordenado por dominancia $(\trianglerighteq)$
- $T(\lambda) = \mathrm{Std}(\lambda)$
- c^{λ}_{st}

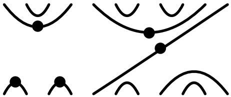
Base celular para $b_n(q, y_e)$



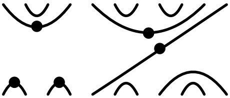
Base celular para $b_n(q, y_e)$

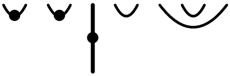


Base celular para $b_n(q, y_e)$

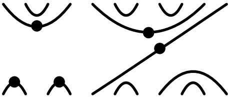


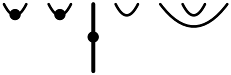
Base celular para $b_n(q, y_e)$





$\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 3&4&7&9&10\\\hline\end{array} \, , \, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&2&5&6&8&11\\\hline\end{array} \right)$ $\qquad$ $\left(\begin{array}{|c|c|c|c|c|}\hline 2&4&7&10&11\\\hline\end{array} \, , \, \begin{array}{|c|c|c|c|c|c|}\hline 1&3&5&6&8&9\\\hline\end{array} \right)$





$\left(\boxed{3}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{9}\boxed{10} \,,\, \boxed{1}\boxed{2}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{8}\boxed{11} \right)$ $\quad$ $\left(\boxed{2}\boxed{4}\boxed{7}\boxed{10}\boxed{11} \,,\, \boxed{1}\boxed{3}\boxed{5}\boxed{6}\boxed{8}\boxed{9} \right)$

- $\Lambda = \mathrm{Bip}_1(n)$
- Λ es ordenado por ($\succeq$)
- $T(\lambda) = \mathrm{Std}(\lambda)$
- c^{λ}_{st}

Problemas a resolver en esta tesis

Problemas a resolver en esta tesis

- Demostrar que las álgebras $TL_n(q)$ y $b_n(m)$ son álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas.

Problemas a resolver en esta tesis

- Demostrar que las álgebras $TL_n(q)$ y $b_n(m)$ son álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas.
- Graduar los módulos celulares y simples.

Problemas a resolver en esta tesis

- Demostrar que las álgebras $Tl_n(q)$ y $b_n(m)$ son álgebras $\mathbb{Z}$-graduadas.
- Graduar los módulos celulares y simples.
- Determinar los respectivos números de descomposición graduados.

Estrategias de resolución

Orden sobre $Bip_1(n)$

Volver