Fórmula de suma para Soergel Calculus en tipo $\tilde{A}_1$ y el álgebra de nil-blob

Presentación del proyecto de tesis

Marcelo Hernández Caro*
Profesor tutor: Steen Ryom-Hansen†

Universidad de Talca
29/09/2022

* Financiado parcialmente por ANID-PFCHA/Doctorado Nacional/2019-21190827

† Financiado parcialmente por Beca FONDECYT grant 1221112

Índice

1. Soergel calculus para $\tilde{A}_1$
2. Álgebra de blob
3. Álgebras celulares
4. Filtración de Jantzen
5. Proyecto de tesis

Índice

1. Soergel calculus para $\tilde{A}_1$
2. Álgebra de blob
3. Álgebras celulares
4. Filtración de Jantzen
5. Proyecto de tesis

Definición (Sistema de Coxeter)

Es un par (W, S) , con W grupo y $S \subset W$ tal que

$$W = \left\langle s \in S : s^2 = 1, (s_i s_j)^{m(s_i, s_j)} = 1 \right\rangle$$

Elias y Williamson asociaron una categoría de diagramas $\tilde{D}_{(W,S)}$ a cada sistema de Coxeter (W, S).

Definición (Sistema de Coxeter)

Es un par (W, S) , con W grupo y $S \subset W$ tal que

$$W = \left\langle s \in S : s^2 = 1, (s_i s_j)^{m(s_i, s_j)} = 1 \right\rangle$$

Elias y Williamson asociaron una categoría de diagramas $\tilde{D}_{(W,S)}$ a cada sistema de Coxeter (W, S).

Para nuestro trabajo sobre Soergel Calculus, fijaremos $S := \{s, t\}$ y consideraremos en adelante

$$W := \left\langle s, t | s^2 = t^2 = 1 \right\rangle .$$

Para construir $\tilde{D}_{(W,S)}$, se necesita precisar una realización $\mathfrak{h}$ de W. En nuestro caso, $\mathfrak{h}$ estará dada por el $\mathbb{C}$-espacio vectorial con base $\{\alpha_s, \alpha_t\}$, donde tenemos

$$R := S(\mathfrak{h}) = \mathbb{C}[\alpha_s, \alpha_t]$$

junto con la acción de W sobre la base dada por

$$\begin{array}{ll} s(\alpha_s) = -\alpha_s & s(\alpha_t) = 2\alpha_s + \alpha_t \\ t(\alpha_t) = -\alpha_t & t(\alpha_s) = \alpha_s + 2\alpha_t \end{array}$$

Y por último, tenemos los operadores de Demazure definidos por

$$\partial_s(f) = \frac{f - s(f)}{\alpha_s} \quad \partial_t(f) = \frac{f - t(f)}{\alpha_t}$$

de donde se tienen las igualdades

$$\partial_s(\alpha_s) = \partial_t(\alpha_t) = 2 \quad \partial_s(\alpha_t) = \partial_t(\alpha_s) = -2$$

Definición (Diagrama de Soergel para (W, S))

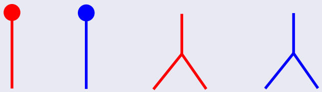
Un diagrama de Soergel para (W, S) es un un grafo finito incrustado en $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Los arcos son de color rojo o azul. Los vértices pueden ser de tipo univalente (dots) o trivalentes, como se muestra a continuación:

Además, el grafo acepta decoraciones por elementos de R.

Sea **exp** el conjunto de expresiones sobre S. Los arcos de un diagrama de Soergel podrán intersectar los bordes de la banda $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Dichas marcas identificarán elementos de **exp**, y les llamaremos marca superior y marca inferior dependiendo del borde donde estén ubicadas.

Definición (Diagrama de Soergel para (W, S))

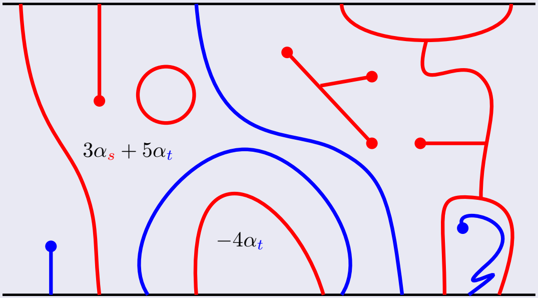
Un diagrama de Soergel para (W, S) es un un grafo finito incrustado en $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Los arcos son de color rojo o azul. Los vértices pueden ser de tipo univalente (dots) o trivalentes, como se muestra a continuación:



Además, el grafo acepta decoraciones por elementos de R.

Sea **exp** el conjunto de expresiones sobre S. Los arcos de un diagrama de Soergel podrán intersectar los bordes de la banda $\mathbb{R} \times [0, 1]$. Dichas marcas identificarán elementos de **exp**, y les llamaremos marca superior y marca inferior dependiendo del borde donde estén ubicadas.

Ejemplo



Se puede apreciar que la marca superior en este diagrama es sstss y la marca inferior es tstssttsts.

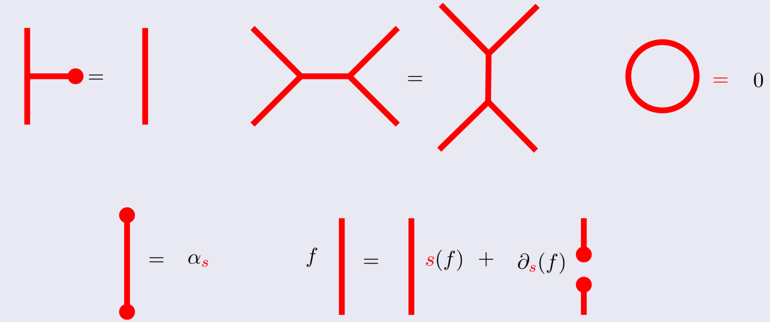
Definición (Categoría de diagramas $\tilde{D}_{(W,S)}$)

$$\tilde{D}_{(W,S)} = \begin{cases} \textit{Objetos:} & \textit{Elementos de } \mathbf{exp}. \\ & \\ Hom_{\tilde{\mathcal{D}}_{(W,S)}}(\underline{x}, \underline{y}) : & \begin{array}{c} R - \textit{combinaciones lineales de} \\ \textit{diagramas con marca} \\ \textit{inferior } \underline{x} \textit{ y marca} \\ \textit{superior } \underline{y}. \end{array} \end{cases}$$

- *Composición de morfismos dada por concatenación vertical.*

Definición (Categoría de diagramas $\tilde{D}_{(W,S)}$)

Relaciones locales:



Las relaciones locales también existen para el color azul.

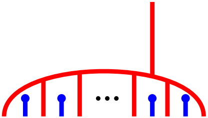
Sea n un entero no negativo fijo y sea $\underline{w} = sts \cdots \in$ **exp** de largo n. Se define la R-álgebra

$$\tilde{A}_w = \mathrm{End}_{\tilde{D}_{(W,S)}}(\underline{w}).$$

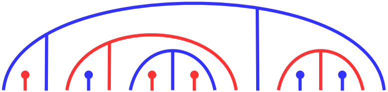
Esta R-álgebra posee una R-base, cuyos elementos se denominan *hojas ligeras dobles*, o simplemente hojas dobles. Para su construcción necesitamos definiciones previas.

Jaula completa no-colgante:

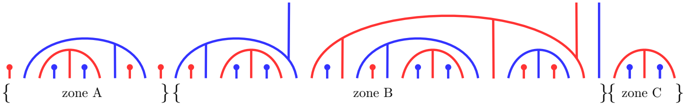
Jaula completa colgante:



Jaula de jaulas:

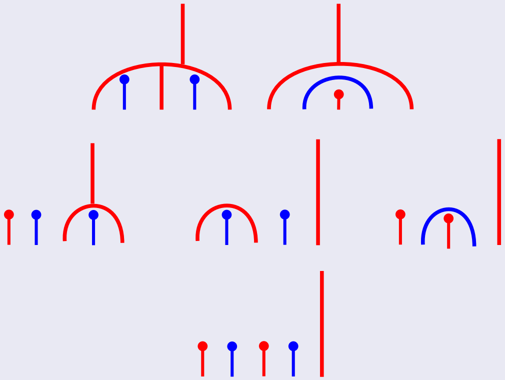


Hoja ligera:



Ejemplo

Las hojas ligeras de $\tilde{A}_{ststs}$ que definen $v = s$ son las siguientes:

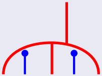
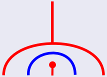


Definición (Hoja doble)

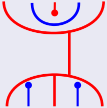
Una hoja doble de $\tilde{A}_w$ es un concatenación vertical del tipo $C^{v}_{D_1,D_2} := D_1 \cdot flip(D_2)$, donde D_1 y D_2 son hojas ligeras que definen v, y flip indica reflexión según eje horizontal.

Ejemplo

Si

$D_1 =$  $\quad y \quad$ $D_2 =$ 

entonces

$C^{\color{red}{s}}_{D_1,D_2} =$ 

Teorema

El conjunto de todas las hojas dobles de $\tilde{A}_w$, *es decir, el conjunto de todas las concatenaciones* $C^v_{D_1,D_2}$, *para todo* $v \leq w$, *forma una base para* $\tilde{A}_w$.

Índice

1. Soergel calculus para $\tilde{A}_1$
2. Álgebra de blob
3. Álgebras celulares
4. Filtración de Jantzen
5. Proyecto de tesis

Para esta sección consideraremos $R := \mathbb{C}[x, y]$.

Definición (Álgebra de Temperley-Lieb $\mathbb{TL}_n$)

El álgebra de Temperley-Lieb $\mathbb{TL}_n$ con parámetro de loop -2 es la R-álgebra sobre los generadores $\mathbb{U}_1, \ldots, \mathbb{U}_{n-1}$ sujeta a las relaciones:

$$\begin{array}{rcll} \mathbb{U}_i^2 & = & -2\mathbb{U}_i, & \textit{si } 1 \leq i < n \\ \mathbb{U}_i\mathbb{U}_j\mathbb{U}_i & = & \mathbb{U}_i, & \textit{si } |i-j| = 1 \textit{ e } i, j > 0 \\ \mathbb{U}_i\mathbb{U}_j & = & \mathbb{U}_j\mathbb{U}_i, & \textit{si } |i-j| > 1 \end{array}$$

Definición (Álgebra de blob $\mathbb{B}_n^{x,y}$)

El álgebra de blob $\mathbb{B}_n^{x,y}$ con parámetro de loop -2, parámetro de blob x, y parámetro de loop decorado y es la R-álgebra sobre los generadores $\mathbb{U}_0, \ldots, \mathbb{U}_{n-1}$ sujeta a las relaciones:

$$
\begin{array}{rcll}
\mathbb{U}_i^2 & = & -2\mathbb{U}_i, & \textit{si } 1 \leq i < n \\
\mathbb{U}_i\mathbb{U}_j\mathbb{U}_i & = & \mathbb{U}_i, & \textit{si } |i-j| = 1 \textit{ e } i,j > 0 \\
\mathbb{U}_i\mathbb{U}_j & = & \mathbb{U}_j\mathbb{U}_i, & \textit{si } |i-j| > 1 \\
\mathbb{U}_1\mathbb{U}_0\mathbb{U}_1 & = & y\mathbb{U}_1, & \\
\mathbb{U}_0^2 & = & x\mathbb{U}_0 &
\end{array}
$$

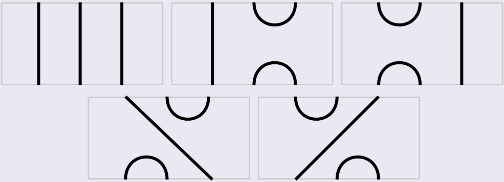
Tanto $\mathbb{TL}_n$ como $\mathbb{B}_n^{x,y}$ son álgebras de diagramas.

Definición (Base de diagramas para $\mathbb{TL}_n$)

La base de diagramas para $\mathbb{TL}_n$ consiste en diagramas de Temperley-Lieb de n puntos, los cuales son emparejamientos mediante trazos entre los n puntos de la frontera norte con los n puntos de la frontera sur de un rectángulo. Pueden existir uniones entre dos puntos de la frontera norte, o dos de la frontera sur. No existes cruces de trazos.

Ejemplo

La base de diagramas para $\mathbb{TL}_3$ es el siguiente conjunto de diagramas de Temperley-Lieb:

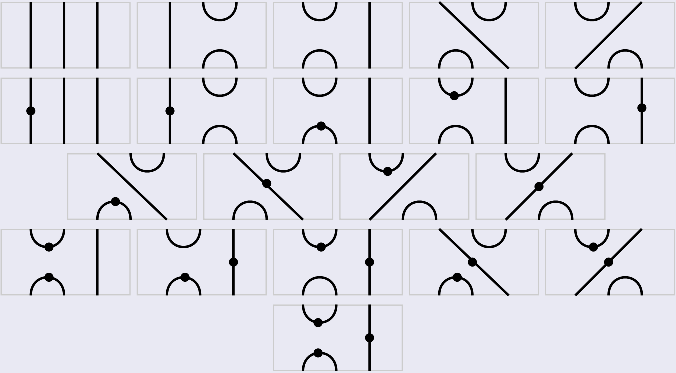


Definición (Base de diagramas para $\mathbb{B}_n^{x,y}$)

La base de diagramas para $\mathbb{B}_n^{x,y}$ consiste en diagramas de blob, los cuales son diagramas de Temperley-Lieb de n puntos que pueden estar decorados por blobs en los emparejamientos que están expuestos al lado izquierdo del rectángulo del diagrama, a lo sumo, una vez. El producto $D_1 D_2$ está dado por concatenación vertical, con D_2 sobre D_1. En caso de aparecer un loop decorado, este se reemplaza por y. En caso de aparecer un trazo decorado $r > 1$ veces, este se reemplaza por el trazo decorado una sola vez, y el diagrama se acompaña del coeficiente x^{r-1}.

Ejemplo

La base de diagramas para $\mathbb{B}_3^{x,y}$ es el siguiente conjunto de diagramas:



Índice

1. Soergel calculus para $\tilde{A}_1$
2. Álgebra de blob
3. Álgebras celulares
4. Filtración de Jantzen
5. Proyecto de tesis

Definición (Álgebra celular)

Sea A una $\Bbbk$-álgebra de rango finito, con $\Bbbk$ un anillo conmutativo con 1. Una estructura de base celular para A consiste en una tripleta (Λ, Tab, C), donde Λ es un conjunto parcialmente ordenado, Tab es una función sobre Λ tal que $Tab(\lambda)$ es un conjunto finito para cada $\lambda \in \Lambda$, y $C : \coprod_{\lambda\in\Lambda} Tab(\lambda) \times Tab(\lambda) \to A$ es una función inyectiva tal que:

1. *El conjunto*
$$\{C^{\lambda}_{s,t} | s, t \in Tab(\lambda), \lambda \in \Lambda\}$$
es una $\Bbbk$-base para A, la cual se llamará base celular para A.
2. *La regla $\left(C^{\lambda}_{s,t}\right)^* := C^{\lambda}_{t,s}$ define un anti-automorfismo de álgebras.*

Definición (Álgebra celular)

3. *Para cada $a \in A$ se tiene que*

$$aC^{\lambda}_{s,t} = \sum_{u \in Tab(\lambda)} r_{usa} C^{\lambda}_{u,t} + \textit{términos menores}$$

donde $r_{usa} \in \Bbbk$ y donde términos menores corresponde a una $\Bbbk$-combinación lineal de $C^{\mu}_{p,q}$, con $\mu < \lambda$.

Si se cumple todo lo anterior, diremos que A es una $\Bbbk$-álgebra celular.

Teorema

$\mathbb{TL}_n$, $\mathbb{B}_n^{x,y}$ y $\tilde{A}_w$ son álgebras celulares.

¡Pero hay otra álgebra celular importante para nuestro trabajo!

Teorema

$\mathbb{TL}_n$, $\mathbb{B}_n^{x,y}$ y $\tilde{A}_w$ son álgebras celulares.

¡Pero hay otra álgebra celular importante para nuestro trabajo!

Sea A_w el conjunto generado por todas las hojas dobles de $\tilde{A}_w$ con sector C vacío. Entonces A_w es una R-álgebra celular considerando la siguiente estructura:

1. $\mathbb{k} = R = \mathbb{C}[\alpha_s, \alpha_t]$.
2. $\Lambda = \Lambda_w := \{v \in W | v = s_{i_k} s_{i_{k+1}} \cdots s_{i_n}$ para $k = 1, ..., n\}$, asumiendo que $\underline{w} = s_{i_1} \cdots s_{i_n}$.
3. $Tab_w(v) = \{$ hojas ligeras de $\tilde{A}_w$ que definen $v\}$.
4. $C^v_{s,t}$ definido como el diagrama producto $s \cdot \text{flip}(t)$.

Definición (Módulo celular)

Sea A una $\Bbbk$-álgebra celular con estructura celular (Λ, Tab, C). Para cada $\lambda \in \Lambda$ se define el módulo celular $\Delta(\lambda)$ como el $\Bbbk$-módulo con base $\{C_s^\lambda | s \in \ Tab(\lambda)\}$, donde la acción de A en $\Delta(\lambda)$ está dada por

$$aC_s^\lambda = \sum_{u \in Tab(\lambda)} r_{usa} C_u^\lambda$$

donde $r_{usa} \in \Bbbk$ son los mismos escalares entregados en la definición de celularidad para A.

Esta definición viene acompañada del siguiente resultado.

Proposición

Existe una única forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle : \Delta(\lambda) \times \Delta(\lambda) \to R$ *dada para cualquier par* $s, t \in Tab(\lambda)$ *por la igualdad*

$$C^{\lambda}_{a,s} C^{\lambda}_{t,b} = \left\langle C^{\lambda}_{s}, C^{\lambda}_{t} \right\rangle_{\lambda} C^{\lambda}_{a,b}$$

donde $a, b \in Tab(\lambda)$

Como se puede apreciar, la base de $\Delta(\lambda)$ se puede identificar directamente con los elementos de $\mathrm{Tab}(\lambda)$, por lo que podemos considerar a $\mathrm{Tab}(\lambda)$ como la base de $\Delta(\lambda)$, lo que ayuda a su vez a calcular valores de la forma bilineal respectiva.

Índice

1. Soergel calculus para $\tilde{A}_1$
2. Álgebra de blob
3. Álgebras celulares
4. Filtración de Jantzen
5. Proyecto de tesis

Definición (Filtración de Jantzen)

Sea R un dominio de ideales principales y $p \in R$ primo. Sea v_p la valuación p-ádica. Sea M un R-módulo libre de rango finito r con una forma bilineal simétrica no-degenerada $(\cdot, \cdot)$.

Sea $\overline{M} = M/pM$ y $\overline{R} = R/pR$. Para cada $i \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ se define

$$M(i) = \{m \in M | (m, M) \subset p^i R\}$$

Ahora, para cada $i \in \mathbb{Z} \cup \{0\}$ consideramos como $\overline{M(i)}$ a la imagen de $M(i)$ bajo la reducción módulo p. Entonces estos $\overline{R}-$subespacios forman una filtración

$$\overline{M} = \overline{M(0)} \supseteq \overline{M(1)} \supseteq \overline{M(2)} \supseteq \dots$$

llamada filtración de Jantzen.

Bajo esta definición, hay un resultado que permite relacionar la matriz $M_{(\cdot,\cdot)}$ con información sobre los módulos de la filtración.

Teorema (Fórmula de suma)

Bajo las hipótesis de antes, sea $D = \det(M_{(\cdot,\cdot)})$ *respecto a una base de* M*. Entonces*

$$v_p(D) = \sum_{i>0} \dim_{\overline{R}} \overline{M(i)}.$$

¿Cómo obtenemos información sobre los módulos $\overline{M(i)}$ a partir de la matriz $M_{(\cdot,\cdot)}$? Veamos el siguiente ejemplo.

Ejemplo

Sea M un $\mathbb{Z}$-módulo con base $B = \{e_1, e_2, e_3\}$ y con forma bilineal simétrica no-degenerada asociada $(\cdot,\cdot)$, cuya matriz está dada por

$$M_{(\cdot,\cdot)} = \begin{bmatrix} 5 & -2 & 7 \\ -2 & 0 & -2 \\ 7 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Tenemos que su forma de Smith está dada por la matriz diagonal

$$M_d = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

de donde $D = \det(M_d) = 32$. Fijemos $p = 2$. Entonces $v_p(D) = 5$. Mirando M_d y por definición de los $M(i)$ obtenemos lo siguiente:

$$
\begin{aligned}
M(0) &= M \\
M(1) &= \{m \in M | (m, M) \subset 2\mathbb{Z}\} \\
&= \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \langle 2b_1, b_2, b_3 \rangle \\
M(2) &= \{m \in M | (m, M) \subset 4\mathbb{Z}\} \\
&= \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \langle 4b_1, b_2, b_3 \rangle \\
M(3) &= \{m \in M | (m, M) \subset 8\mathbb{Z}\} \\
&= \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \langle 8b_1, 2b_2, b_3 \rangle \\
M(k) &= \{m \in M | (m, M) \subset 2^k\mathbb{Z}\} \\
&= \mathrm{Span}_{\mathbb{Z}} \langle 2^k b_1, 2^{k-2} b_2, 2^{k-3} b_3 \rangle \text{ para } k > 3
\end{aligned}
$$

Y al aplicar la reducción módulo $p = 2$ obtenemos los módulos de la filtración de Jantzen:

$$
\begin{array}{rcl}
\overline{M(0)} & = & \overline{M} \\
\overline{M(1)} & = & \mathrm{Span}_{\mathbb{F}_2}\langle \overline{b_2}, \overline{b_3} \rangle \\
\overline{M(2)} & = & \mathrm{Span}_{\mathbb{F}_2}\langle \overline{b_2}, \overline{b_3} \rangle \\
\overline{M(3)} & = & \mathrm{Span}_{\mathbb{F}_2}\langle \overline{b_3} \rangle \\
\overline{M(k)} & = & \overline{0} \text{ para } k > 3
\end{array}
$$

de donde podemos verificar la fórmula de sumas:

$$
\sum_{i>0} \dim_{\overline{R}} \overline{M(i)} = 2 + 2 + 1 = v_p(D).
$$

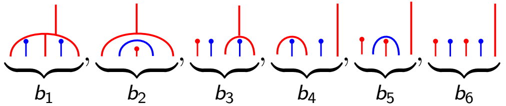
Índice

1. Soergel calculus para $\tilde{A}_1$
2. Álgebra de blob
3. Álgebras celulares
4. Filtración de Jantzen
5. Proyecto de tesis

El objetivo de nuestro proyecto es estudiar la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,v}^{w}$ correspondiente al módulo celular $\Delta_w(v)$ de A_w, establecer una filtración de tipo Jantzen sobre $\Delta_w(v)$ y obtener una fórmula de suma análoga a la de la filtración de Jantzen.

A modo de ejemplo, consideremos $\underline{w} = ststs$ y $v = s$. Tenemos que $n = \ell(w) = 5$. El módulo celular en este caso está denotado por $\Delta_{ststs}(s)$, el cual tiene base dada por

$$\mathrm{Tab}_{ststs}(s) = \Big\{$$

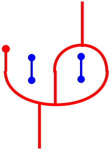
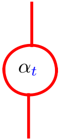


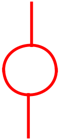
$$\Big\}$$

Entonces, para estudiar la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle^{ststs}_{5,s}$ es suficiente con calcular las imágenes $\langle b_i, b_j \rangle^{ststs}_{5,s}$, para $1 \leq i, j \leq 6$.

¿Cómo calculamos $\langle \cdot, \cdot \rangle^{ststs}_{5,s}$?

Por ejemplo, para calcular $\langle b_1, b_3 \rangle_{5,s}^{ststs}$, primero debemos desarrollar el producto $\mathrm{flip}(b_1) \cdot b_3$:

$\mathrm{flip}(b_1) \cdot b_3 \quad =$  $= \quad \alpha_t$ 

$= \quad \alpha_t \Bigg(s(\alpha_t)$  $+ \quad \partial_s(\alpha_t)$  $\Bigg)$

$= \quad -2\alpha_t$

Ahora, en el diagrama resultante de $\mathrm{flip}(b_1) \cdot b_3$ debemos identificar el coeficiente del diagrama I_v, el cual es el diagrama con $\ell(v)$ líneas verticales, siguiendo la coloración de v. En este caso,

$$I_v = I_s \quad =$$

Dicho coeficiente de I_v en el producto $\mathrm{flip}(b_1) \cdot b_3$ será el valor de $\langle b_1, b_3 \rangle_{5,s}^{ststs}$. En este caso,

$$\langle b_1, b_3 \rangle_{5,s}^{ststs} = -2\alpha_t.$$

De manera análoga podemos hallar las otras imágenes. Así, se puede obtener la siguiente matriz asociada a $\langle \cdot,\cdot \rangle_{5,s}^{ststs}$, la cual denotaremos por $M_{5,s}^{ststs}$. En este caso:

$$M_{5,s}^{ststs} = \begin{pmatrix} 4 & -2 & -2\,\alpha_t & -2\,\alpha_t & \alpha_t & \alpha_t^2 \\ -2 & 4 & \alpha_t & \alpha_t & -2\,\alpha_t & \alpha_s\alpha_t \\ -2\,\alpha_t & \alpha_t & -2\,\alpha_s\alpha_t & \alpha_t^2 & \alpha_s\alpha_t & \alpha_s\alpha_t^2 \\ -2\,\alpha_t & \alpha_t & \alpha_t^2 & -2\,\alpha_s\alpha_t & \alpha_s\alpha_t & \alpha_s\alpha_t^2 \\ \alpha_t & -2\,\alpha_t & \alpha_s\alpha_t & \alpha_s\alpha_t & -2\,\alpha_s\alpha_t & \alpha_s^2\alpha_t \\ \alpha_t^2 & \alpha_s\alpha_t & \alpha_s\alpha_t^2 & \alpha_s\alpha_t^2 & \alpha_s^2\alpha_t & \alpha_s^2\alpha_t^2 \end{pmatrix}$$

En esta instancia resulta muy importante estudiar una posible diagonalización de $M_{5,s}^{ststs}$, debido a que esto nos entregaría información sobre los módulos de la filtración tipo Jantzen que se quiere construir sobre $\Delta_{ststs}(s)$.

Problema: $R = \mathbb{C}[\alpha_s, \alpha_t]$ no es DIP.

Solución: Usamos los siguientes resultados y definiciones para trabajar en $\mathbb{B}^{x,y}_{n-1}$ en lugar de A_w.

Teorema

$$\mathbb{B}^{x,y}_{n-1} \cong A_w$$

Definición

La función $\psi : \Lambda_w \to \Lambda_{n-1}$ *definida por*

$$\psi(v) = \begin{cases} \ell(v) - 1 & \text{si } v \text{ comienza con } s \\ -\ell(v) & \text{si } v \text{ comienza con } t \end{cases} \tag{5.1}$$

es un isomorfismo.

Teorema

Si $\psi(v) = \lambda$, *entonces*

$$\Delta^{\mathbb{B}}_{n-1}(\lambda) \cong \Delta_w(v).$$

Retomando nuestro ejemplo, como $\psi(v) = \psi(s) = 0$, entonces tenemos el isomorfismo de módulos celulares

$$\Delta_{ststs}(s) \cong \Delta_4^{\mathbb{B}}(0).$$

Este cambio de contexto favoreció mucho en los cálculos de la forma bilineal. De hecho, se logró concretizar la diagonalización de la matriz asociada a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle_{n,\lambda}^{\mathbb{B}}$. Este es uno de los resultados más importantes a lo largo de nuestro proyecto.

Teorema

Sea $M^{\mathbb{B}}_{n,\lambda}$ la matriz asociada a la forma bilineal $\langle \cdot, \cdot \rangle^{\mathbb{B}}_{n,\lambda}$ del módulo celular $\Delta^{\mathbb{B}}_n(\lambda)$. Entonces

$$M^{\mathbb{B}}_{n,\lambda} = \begin{pmatrix} c_0(x,y) I_{d_0} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & c_1(x,y) I_{d_1} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & c_k(x,y) I_{d_k} \end{pmatrix}$$

donde $d_i = \dim \Delta^{\mathbb{TL}_n}(|\lambda| + 2i)$ e I_{d_i} es la matriz identidad de $d_i \times d_i$, mientras que los 0 representan matrices nulas de dimensión adecuada.

Sean

$$\alpha_{x,i} = ix + (i-1)y$$

$$\alpha_{y,i} = iy + (i-1)x$$

Teorema

- *Si $\lambda \geq 0$ entonces*

$$c_i(x,y) = (\alpha_{x,\lambda+2}\,\alpha_{x,\lambda+3}\cdots\alpha_{x,\lambda+i+1})\alpha_{y,1}\,\alpha_{y,2}\cdots\alpha_{y,i}.$$

  Si $i = 0$ entonces $c_i(x,y) = 1$.

- *Si $\lambda < 0$ entonces*

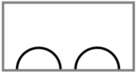
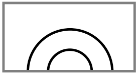
$$c_i(x,y) = (\alpha_{x,1}\,\alpha_{x,2}\cdots\alpha_{x,i+1})\,\alpha_{y,1+|\lambda|}\,\alpha_{y,2+|\lambda|}\cdots\alpha_{y,i+|\lambda|}.$$

  Si $i = 0$ entonces $c_i(x,y) = x$.

Retomemos el ejemplo de antes: $\Delta_4^{\mathbb{B}}(0)$. Aquí, $n = 4$ y $\lambda = 0$.

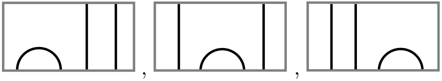
Entonces, para calcular la matriz $M_{4,0}^{\mathbb{B}}$ asociada a $\langle \cdot, \cdot \rangle_{4,0}^{\mathbb{B}}$ debemos calcular cada $c_i(x, y)$, y ver cuántas veces se repite en la diagonal.

Para $i = 0$ tenemos $c_0(x, y) = 1$. Este valor aparece $d_0 = \dim \Delta^{\mathbb{TL}_4}(0)$ veces en $M_{4,0}^{\mathbb{B}}$. Como

Tab(0) = $\Big\langle$ ,  $\Big\rangle$

entonces $d_0 = 2$ (es decir, 1 aparece dos veces en la matriz).

Para $i = 1$ tenemos $c_1(x, y) = \alpha_{x,2}\alpha_{y,1}$. Este valor aparece $d_1 = \dim \Delta^{\mathbb{TL}_4}(2)$ veces en $M^{\mathbb{B}}_{4,0}$. Como

$\mathrm{Tab}(2) = \Big\langle$  $\Big\rangle$

entonces $d_1 = 3$ (es decir, $\alpha_{x,2}\alpha_{y,1}$ aparece tres veces en la matriz).

Para $i = 2$ tenemos $c_2(x, y) = \alpha_{x,2}\alpha_{x,3}\alpha_{y,1}\alpha_{y,2}$. Este valor aparece $d_2 = \dim \Delta^{\mathbb{TL}_4}(4)$ veces en $M^{\mathbb{B}}_{4,0}$. Como

$$\mathrm{Tab}(4) \quad = \quad \Big\langle$$  $$\Big\rangle$$

entonces $d_2 = 1$ (es decir, $\alpha_{x,2}\alpha_{x,3}\alpha_{y,1}\alpha_{y,2}$ aparece una vez en la matriz).

Por lo tanto, obtenemos la diagonalización

$$M_{4,0}^{\mathbb{B}} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{x,2}\alpha_{y,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{x,2}\alpha_{y,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{x,2}\alpha_{y,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{x,2}\alpha_{x,3}\alpha_{y,1}\alpha_{y,2} \end{pmatrix}$$

Para regresar de $\Delta_4^{\mathbb{B}}(0)$ a $\Delta_{ststs}(s)$ basta hacer la identificación $x = \alpha_s$, $y = \alpha_t$, y gracias al isomorfismo entre estos dos módulos celulares obtenemos la misma matriz de la forma bilineal:

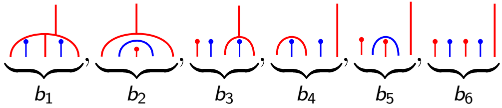
$$M_{5,s}^{ststs} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \alpha_{x,2}\alpha_{y,1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \alpha_{x,2}\alpha_{y,1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{x,2}\alpha_{y,1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \alpha_{x,2}\alpha_{x,3}\alpha_{y,1}\alpha_{y,2} \end{pmatrix}$$

Ahora, con la intención de elaborar un análogo a la filtración de Jantzen, se define para una raíz γ de W el módulo

$$\Delta_w^{\gamma,i}(v) = \{a \in \Delta_w(v) | \langle a, \Delta_w(v)\rangle_{n,v}^{w} \subset \gamma^i R\}$$

Siguiendo con nuestro ejemplo, y recordando que la base de $\Delta_{ststs}(s)$ estaba dada por los diagramas de

$$\mathrm{Tab}_{ststs}(s) = \{$$



$$\}$$

podemos obtener los siguientes módulos $\Delta_w^{\gamma,i}(v)$, considerando como raíz a $\gamma = \alpha_{x,2}$:

$$
\begin{aligned}
\Delta^{\gamma,0}_{ststs}(s) &= \Delta_{ststs}(s)\\
\Delta^{\gamma,1}_{ststs}(s) &= \{a \in \Delta_{ststs}(s) | \langle a, \Delta_{ststs}(s)\rangle^{w}_{n,v} \subset \gamma R\}\\
&= \mathrm{Span}_R\langle \gamma b'_1, \gamma b'_2, b'_3, b'_4, b'_5, b'_6\rangle\\
\Delta^{\gamma,k}_{ststs}(s) &= \{a \in \Delta_{ststs}(s) | \langle a, \Delta_{ststs}(s)\rangle^{w}_{n,v} \subset \gamma^2 R\}\\
&= \mathrm{Span}_R\langle \gamma^k b'_1, \gamma^k b'_2, \gamma^{k-1} b'_3, \gamma^{k-1} b'_4, \gamma^{k-1} b'_5, \gamma^{k-1} b'_6\rangle \text{ para } k > 1
\end{aligned}
$$

Aquí, al aplicar una reducción módulo γ, obtenemos los siguientes módulos:

$$\begin{aligned}
\overline{\Delta^{\gamma,0}_{ststs}(s)} &= \overline{\Delta_{ststs}(s)} \\
\overline{\Delta^{\gamma,1}_{ststs}(s)} &= \mathrm{Span}_{\overline{R}}\langle \overline{b'_3}, \overline{b'_4}, \overline{b'_5}, \overline{b'_6} \rangle \\
\overline{\Delta^{\gamma,k}_{ststs}(s)} &= \overline{0} \text{ para } k > 1
\end{aligned}$$

Además, $v_\gamma(\det(M^{ststs}_{5,s})) = v_\gamma(\alpha^4_{x,2}\alpha_{x,3}\alpha^4_{y,1}\alpha_{y,2}) = 4$, por lo que

$$\sum_{i>0} \dim_{\overline{R}} \overline{\Delta^{\gamma,i}_{ststs}(s)} = \dim_{\overline{R}} \overline{\Delta^{\gamma,1}_{ststs}(s)} = 4 = v_\gamma(\det(M^{ststs}_{5,s})).$$

MUCHAS GRACIAS